<u>Def.</u> Siano $I, J \subseteq \mathbb{R}$, intervalli aperti, e siano $a \in C(I,\mathbb{R})$, $b \in C(J,\mathbb{R})$. L'equazione differenziale

(ES) $\quad \dot{x} = a(t)\, b(x)$,

è detta a <u>variabili separabili</u>.

<u>Corollario</u> (del Teorema di esistenza per EDO del I ordine).
Siano $t_0 \in I \subseteq \mathbb{R}$ e $x_0 \in J \subseteq \mathbb{R}$; I, J intervalli aperti, e siano $a \in C(I,\mathbb{R})$, $b \in C(J,\mathbb{R})$.
Allora, il problema di Cauchy

$$(PCS)\begin{cases} (ES) & \dot{x} = a(t)\,b(x) \\ (CI) & x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

ha almeno una soluzione $\varphi \in C^1(H,\mathbb{R})$, con $t_0 \in H \subseteq I$, H intervallo.

<u>Oss.</u> (1) ~~La dimostrazione~~ Il corollario segue dal fatto che $f(t,x) = a(t)\,b(x)$ definisce $f \in C(I \times J, \mathbb{R})$.
(2) Il corollario, in realtà, può essere dimostrato direttamente, come vedremo in seguito trovando una soluzione di (PCS).
(3) In generale (vedi sotto) la soluzione di (PC) non è unica.

<u>Teorema.</u> Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ aperto; $f \in C(\Omega,\mathbb{R})$; $(t_0,x_0) \in \Omega$ e supponiamo che $\exists\, \frac{\partial f}{\partial x} \in C(\Omega,\mathbb{R})$.
Allora, il problema di Cauchy

$$(PC)\begin{cases} (E) & \dot{x} = f(t,x) \\ (CI) & x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

ha una soluzione e <u>una sola</u>.
Cioè, se $t_0 \in H$, $t_0 \in K$, H, K intervalli aperti in $\mathbb{R}$ e $\varphi \in C^1(H,\mathbb{R})$ e $\psi \in C^1(K,\mathbb{R})$ sono soluzioni di (PC), allora $\forall t \in H \cap K \Rightarrow \varphi(t) = \psi(t)$.

<u>Def.</u> Siano Ω, f, (t_0,x_0) come qui sopra e sia $\varphi \in C^1(H,\mathbb{R})$ una soluzione di (PC), con $H \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $t_0 \in H$. φ è la <u>soluzione non prolungabile</u> di (PC) se per ogni soluzione $\psi \in C^1(K,\mathbb{R})$ di (PC) si ha che $K \subseteq H$.

Corollario. Siano $t_0 \in I \subseteq \mathbb{R}$ e $x_0 \in J$; $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalli aperti, e siano $a \in C(I, \mathbb{R})$ e $b \in C^1(J, \mathbb{R})$.

Allora, il problema di Cauchy (PCS) di pag. 1 ha un'unica soluzione.

dim. Sia $f(t,x) = a(t)b(x)$, $f \in C(I \times J, \mathbb{R})$. Poiché $\exists \frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = a(t) \cdot b'(x)$, le ipotesi del Teo. sono verificate.

$\boxed{\text{Come risolvo (PCS)?}}$ Ci mettiamo nelle ipotesi $a \in C(I, \mathbb{R})$ e $b \in C(J, \mathbb{R})$.

Caso ~~elementare~~ facile. $b(x_0) = 0$. Allora, $\varphi \in C^1(I, \mathbb{R})$, $\varphi(t) = x_0$ $(\forall t \in I)$ è soluzione di (PCS) (costante!).

Caso elementare. Suppongo che $b(x_0) \neq 0$.

Voglio $t_0 \in H \subseteq I$ e $\varphi \in C^1(I, \mathbb{R})$ t.c.

$$\left\{\begin{array}{l} \dot\varphi(t) = a(t) \cdot b(\varphi(t)) \\ \varphi(t_0) = x_0 \end{array}\right\} \quad \text{quindi di} \quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\dot\varphi(t)}{b(\varphi(t))} = a(t) \\ \varphi(t_0) = x_0 \end{array}\right\}$$

e posso dividere per $b(\varphi(t))$ poiché $b(\varphi(t_0)) = b(x_0) \neq 0$
$\Rightarrow (\exists \varepsilon_1 > 0 : |t - t_0| < \varepsilon_1 \Rightarrow b(\varphi(t)) \neq 0)$.

Integrando tra t_0 e t (con $|t - t_0| < \varepsilon_1$):

$$\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} \frac{\dot\varphi(\xi)}{b(\varphi(\xi))}\,d\xi = \int_{\varphi(t_0)}^{\varphi(t)} \frac{dv}{b(v)} = \int_{x_0}^{\varphi(t)} \frac{dv}{b(v)}.$$

cambio variabili: $v = \varphi(\xi)$ (CI)

A questo punto, φ è definita "implicitamente" dall'equazione

$$\boxed{(A) \quad \int_{t_0}^{t} a(s)\,ds = \int_{x_0}^{\varphi(t)} \frac{dv}{b(v)}}$$

Siano $F : I \to \mathbb{R}$, $F(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\,ds$

e $G : K \to \mathbb{R}$, $G(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{dv}{b(v)}$,

dove $x_0 \in K \subseteq J$, K intervallo aperto t.c. $\forall x \in K \Rightarrow b(x) \neq 0$.

Per T.F.C.I. $F \in C^1(I, \mathbb{R})$; $G \in C^1(K, \mathbb{R})$ e l'uguaglianza (A) diventa:

$$\boxed{(A') \quad F(t) = G(\varphi(t))}$$

Se possiamo applicare il Teorema della funzione inversa a G, abbiamo

$$\boxed{(A'') \quad \varphi(t) = G^{-1}(F(t))}$$

dove $G(x_0) = 0$, quindi $G^{-1}(0) = x_0$

Quindi, (A'') ci dà una soluzione di (PCS) (l'unica, su un intervallo $H \subseteq I$, $t_0 \in H$, abbastanza piccolo). Per verificarlo, procediamo alla rovescia:

$$\varphi(t) = G^{-1}(F(t)) \Rightarrow G(\varphi(t)) = F(t) \Rightarrow G'(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t) = \dot{F}(t)$$

Ma per T.F.C.I. $G'(x) = \frac{1}{b(x)}$, e $\dot{F}(t) = a(t)$, quindi

$$\frac{1}{b(\varphi(t))} \cdot \dot{\varphi}(t) = a(t) \Rightarrow \dot{\varphi}(t) = a(t)\, b(\varphi(t)),$$ che è (ES) per ogni t per cui tutti i conti hanno senso.

D'altra parte, $\varphi(t_0) = G^{-1}(F(t_0)) = G^{-1}(0) = x_0$, che è (CI)

Per completezza, verifico che se φ è sol. di (PCS), allora possiamo applicare il Teo. della funzione inversa.

Avevamo $\forall t: |t - t_0| < \varepsilon_1 \Rightarrow F(t) = G(\varphi(t))$.

Ora, $G(x_0) = 0$ e $G'(x_0) = 1/b(x_0) \neq 0$. Quindi, esistono intervalli aperti $P \ni x_0$ e $Q \ni 0$ t.c.

$P \xrightarrow{G} Q$ è biunivoca e $G^{-1}: Q \to P$ è $G^{-1} \in C^1(Q, \mathbb{R})$.

Ora, $F(t_0) = 0$, quindi $\exists \varepsilon_2 > 0 : \forall t \; |t - t_0| < \varepsilon_2 \Rightarrow \varphi(t) \in P$ e $F(t) \in Q$. Poiché $F(t) = G(\varphi(t))$ e G è biunivoca da P a Q, $\varphi(t) = G^{-1}(F(t))$, cioè (A'') vale $\forall t \in (t_0 - \varepsilon_2, t_0 + \varepsilon_2)$.

Questo mostra (con tutto rigore) che, se φ è sol. di (PCS), allora $\exists \varepsilon_2 > 0$ t.c.

$$\forall t: |t-t_0| < \varepsilon_2 \Rightarrow \quad \varphi(t) = G^{-1}(F(t)).$$

(notare che F e G si costruiscono in base ai <u>dati</u> di (PCS)).

Viceversa, se $\varphi(t) = G^{-1}(F(t))$ è definita $\forall t \in (t_0-\varepsilon_2, t_0+\varepsilon_2)$, dove $|t-t_0| < \varepsilon_2 \Rightarrow F(t) \in Q$ e $G^{-1}(F(t)) \in P$ (ciò vale per $\varepsilon_2 > 0$ "piccolo"), allora tutti i passi e ritroso visti sopra possono essere fatti.

<u>Esempi</u>.

① Non è detto che la soluzione non prolungabile di (PCS) sia definita su tutto I.

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ x(0) = K \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Trovo le soluzioni $\forall K \in \mathbb{R}$.
Noto: $a(t) = 1$, $b(x) = x^2$; $I = J = \mathbb{R}$, $t_0 = 0$; $x_0 = K$.

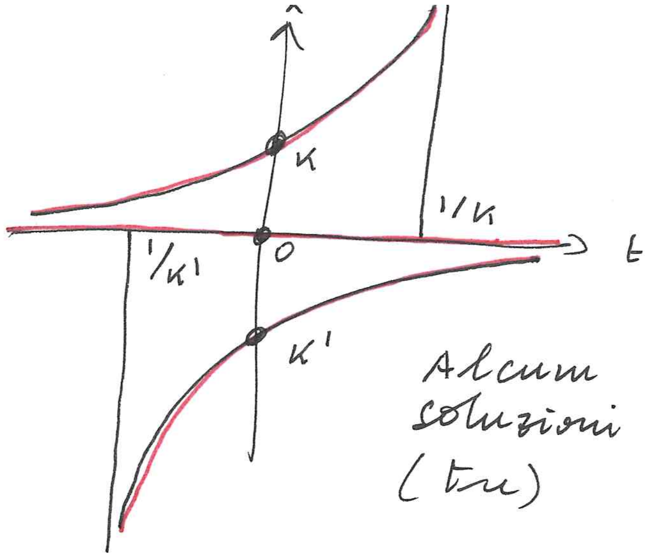
Se $K = 0$, poiché $b(0) = 0$, ho la soluz. $\varphi_0(t) = 0$, $\varphi_0 \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Sia $K \neq 0$. $\dfrac{\dot{x}(t)}{x(t)^2} = 1 \implies \displaystyle\int_0^t \frac{\dot{x}(s)\,ds}{x(s)^2} = \int_0^t ds = t$

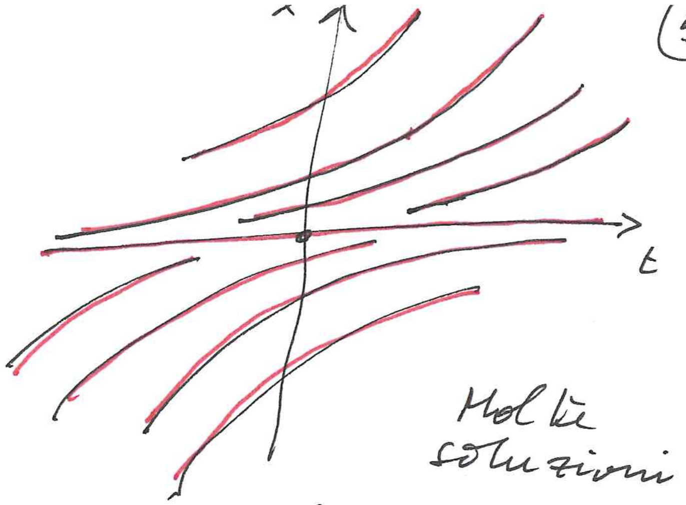
$$\frac{1}{K} - \frac{1}{x(t)} = \frac{1}{x(0)} - \frac{1}{x(t)} = \left(-\frac{1}{v}\right)\Bigg|_{x(0)}^{x(t)} = \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dv}{v^2} = t$$

cioè $x(t) = \left(\frac{1}{K} - t\right)^{-1} = \dfrac{K}{1-tK}$, definita per

$\frac{1}{K} < t < \infty$ se $K < 0$ e per $-\infty < t < \frac{1}{K}$ se $K > 0$.



Alcune soluzioni (tre)



Molte soluzioni

$\forall (t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$, uno e uno solo grafico di soluzione passa per (t_0, x_0)

(2) Se $b \notin C^1(J, \mathbb{R})$, può succedere che la soluzione di (PCS) non sia unica.

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{|x|} \\ x(0) = K \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Per $K=0$, la soluzione $\varphi_0(t) = 0$, $\varphi_0 \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, va bene.

$$\begin{cases} \dfrac{\dot{x}(t)}{|x(t)|^{1/2}} = 1 \\ x(0) = K \end{cases} \iff \int_0^t \frac{\dot{x}(s)\, ds}{|x(s)|^{1/2}} = \int_0^t ds = t$$

$$\int_0^t \frac{\dot{x}(s)\, ds}{|x(s)|^{1/2}} = \int_{K = x(0)}^{x(t)} \frac{dv}{|v|^{1/2}} = \left[\frac{|v|^{+1/2}}{-1/2 \cdot \operatorname{sgn}(v)} \right]_K^{x(t)}$$

$$\cancel{\left| \frac{2\operatorname{sgn}(K)}{|K|^{1/2}} - \frac{2\operatorname{sgn}(x(t))}{|x(t)|^{1/2}} \right.}$$

$$\cancel{\iff \frac{2\operatorname{sgn}(x(t))}{|x(t)|^{1/2}} = \frac{2\operatorname{sgn}(K)}{|K|^{1/2}} - t}$$

~~Ponendo t=0:~~ $\cancel{\iff |x(t)|}$

$$\cancel{\Rightarrow |x(t)|^{1/2} = \left(t - \frac{2\operatorname{sgn}(K)}{|K|^{1/2}} \right)^{-1}}$$

$$\cancel{\text{e } |x(t)| = \left(t - \frac{2\operatorname{sgn}(K)}{|K|^{1/2}} \right)^{-2}}$$

~~Ciò è possibile se e solo se~~

$\cancel{x(t) = \pm}$

Da cui

$$t = -2\cdot|x(t)|^{1/2}\operatorname{sgn}(x(t)) + 2|K|^{1/2}\operatorname{sgn}(K)$$

cioè

$$|x(t)|^{1/2}\cdot\operatorname{sgn}(x(t)) = |K|^{1/2}\operatorname{sgn}(K) - t/2,$$

da cui segue

$$|x(t)| = \left(\frac{t}{2} - |K|^{1/2}\cdot\operatorname{sgn}(K)\right)^2,$$

cioè $\quad x(t) = \pm\left(\frac{t}{2} - |K|^{1/2}\cdot\operatorname{sgn}(K)\right)^2.$

Per scegliere tra + e −, osservo che

$K = x(0) = \pm|K|$, cioè $\quad x(t) = \begin{cases} + \\ - \end{cases}\left(\frac{t}{2} - |K|^{1/2}\cdot\operatorname{sgn}(K)\right)^2 \begin{cases}\text{se } K>0 \\ \text{se } K<0\end{cases}$

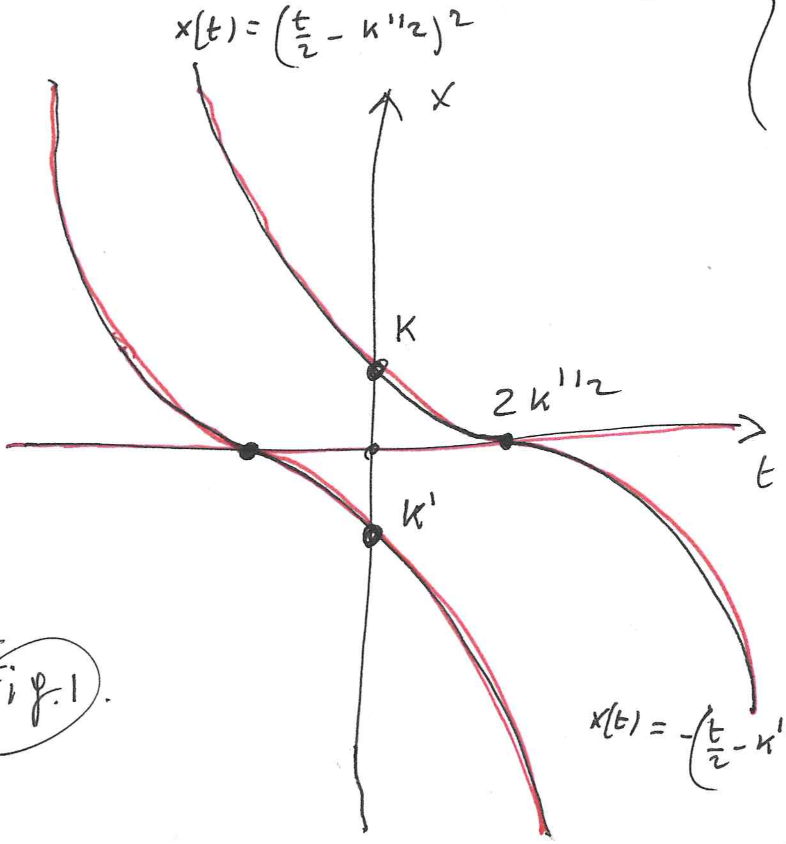


Fig. 1.

Nota: esatto per φ_0, le soluz. sono equazioni di parabole.

~~Dominio Punto~~

~~K>0, per esempio.~~

Poichè $\cancel{|x(t)|^{1/2}\cdot\operatorname{sgn}(x(t)) = K^{1/2} - t/2}$, ~~ho che~~ $\cancel{\operatorname{sgn}(x(t))>0 \iff K^{1/2} - t/2 > 0 \iff K^{1/2} > \frac{t}{2}}$:

~~la soluz. è~~

$\cancel{x(t) = \left(\frac{t}{2} - K^{1/2}\right)^2,\ t\in(-\infty, 2K^{1/2}}$

Per ~~K<0,~~ $\cancel{x(t) = -\left(\frac{t}{2} + |K|^{1/2}\right)^2}$ ~~con~~ $\cancel{t\in(-2|K|^{1/2}, +\infty)}$.

Considero per comodità il solo caso $k \geq 0$. (7

Allora (*) $x(t) = \left(\frac{t}{2} - k^{1/2}\right)^2$ finchè

ciò soddisfa (□) $|x(t)|^{1/2} \cdot \operatorname{sgn}(x(t)) = k^{1/2} - t/2$.

Ora, poichè in (*) $x(t) > 0$ (se $t \neq 2k^{1/2}$),

ho $\operatorname{sgn}(x(t)) > 0$, quindi $k^{1/2} - t/2 > 0$,

cioè $t < 2k^{1/2}$ $\left(t \in (-\infty, 2k^{1/2})\right)$.

Ma potrei porre $x(t) = -\left(\frac{t}{2} - k^{1/2}\right)^2$

per $t \in [2k^{1/2}, +\infty)$, ottenendo la

soluzione

$$(C) \quad x(t) = \begin{cases} \left(\frac{t}{2} - k^{1/2}\right)^2 & \text{se } t \leq 2k^{1/2} \\ -\left(\frac{t}{2} - k^{1/2}\right)^2 & \text{se } t \geq 2k^{1/2} \end{cases}$$

che soddisfa ancora (□).

Si guardi ora (Fig. 1) a p. 6.

Il (PCS) $\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{|x|} \\ x(0) = k \end{cases}$ ha le soluzioni (C^1!!):

$x_1(t) = x(t)$ in (C)

$$x_2(t) = \begin{cases} \left(\frac{t}{2} - k^{1/2}\right)^2 & \text{se } t \leq 2k^{1/2} \\ 0 & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

e molte altre...

L'unicità della soluzione di (PCS) viene meno.

OSS. x_1 e x_2 sono anche soluz. di (PCS') $\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{|x|} \\ x(0) = 2k^{1/2} \end{cases}$