21 aprile 2011 - PROVA INTERMEDIA - Analisi Matematica

NOME:———————————————— MATRICOLA: ————————

Rispondere soltanto su questo foglio

Stabilire la verità (V) o falsità (F) di ciascuna delle seguenti affermazioni, marcando con una crocetta il simbolo corrispondente e motivando brevemente la risposta.

[ ] [(V) (F)] [punti 1.5] Sia $A \subset R^2$ aperto, e sia f una funzione differenziabile in ogni punto dell'insieme A. Allora f e' continua in A.

Svolgere gli esercizi seguenti

[ ][punti 2] Sia $f \in C^1(R^3, R)$, e sia

$$g(x,y) = f(xy, xe^y, x-y).$$

Calcolare $\frac{\partial g}{\partial x}(1,0)$

[ ][punti 4] Determinare i punti critici della funzione seguente e classificarli

$$f(x,y) = (x+y)(x^2+3y^2-4)$$

NOME:———————————————— MATRICOLA: ————————

Rispondere soltanto su questo foglio

[ ] [punti 1.5] Consideriamo l'equazione differenziale

$$(E) \quad \ddot{x} + \sin(t)\dot{x} + \cos(t)x = 0, \ t \in \mathbb{R}.$$

1. Quante soluzioni ha (E)?
2. Quante tra le soluzioni φ di (E) soddisfano $\varphi(0) = 0$?

Svolgere gli esercizi seguenti

[ ][punti 2] Trovare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione

$$(z^3 + 2 + 3i)(z^2 - (1+i)2z + 4i) = 0.$$

[ ][punti 2] Trovare l'integrale generale di

$$\ddot{x} + 4x + \frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{1}{2}e^{2t} = 0.$$

21 aprile 2011 - PROVA INTERMEDIA - Analisi Matematica

NOME:———————————————— MATRICOLA: ————————

Rispondere soltanto su questo foglio

Stabilire la verità (V) o falsità (F) di ciascuna delle seguenti affermazioni, marcando con una crocetta il simbolo corrispondente e motivando brevemente la risposta.

[ ] [(V) (F)] [punti 1.5] Sia $A \subset R^2$ aperto, e sia f una funzione che ammette derivate parziali rispetto ad x e y in un punto (x_0, y_0) dell'insieme A. Allora f e' continua in (x_0, y_0).

Svolgere gli esercizi seguenti

[ ][punti 2] Sia $f \in C^1(R^3, R)$, e sia

$$g(x,y) = f(2xy, xe^{3y}, 5sin(x)).$$

Calcolare $\frac{\partial g}{\partial y}(1,0)$

[ ][punti 4] Determinare i punti critici della funzione seguente e classificarli

$$f(x,y) = (x-y)(x^2 + 5y^2 - 4)$$

NOME:———————————————— MATRICOLA: ————————

Rispondere soltanto su questo foglio

[ ] [punti 1.5] Consideriamo l'equazione differenziale

$$(E) \quad \ddot{x} + \sin(t)\dot{x} + \cos(t)x = 0, \ t \in \mathbb{R}.$$

1. Quante tra le soluzioni φ di (E) soddisfano $\dot{\varphi}(0) = 1$?
2. Esistono soluzioni *distinte* di (E) che coindono sull'intervallo $[0, \pi]$?

Svolgere gli esercizi seguenti

[ ][punti 2]

Trovare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione

$$(z^3 + 3 + 5i)(z^2 - (1+i)3z + 9i) = 0.$$

[ ][punti 2] Trovare l'integrale generale di

$$\ddot{x} + 9x + \frac{1}{2}\sin(3t) + \frac{1}{3}e^{3t} = 0.$$

Vero/Falso.

(i) f differenziabile in $A \subseteq \mathbb{R}^2$, A aperto $\Rightarrow f \in C(A, \mathbb{R})$?

Vero: è un teorema sulle funzioni differenziabili.

(ii) f ha derivate parziali in $(x_0, y_0) \in A$ rispetto a x e y $\Rightarrow f$ è continua in (x_0, y_0)?

Falso: prendiamo $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \text{ o } y = 0 \\ 1 & \text{se } x \neq 0 \text{ e } y \neq 0 \end{cases}$$

Allora, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ (esistono!),

ma f è discontinua in $(0,0)$, poichè $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} (0,0)$, ma $f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = 1 \underset{n \to \infty}{\not\to} 0 = f(0,0)$.

(iii) Sia (E) $\ddot{x} + \sin(t) \cdot \dot{x} + \cos(t) \cdot x = 0$, $t \in \mathbb{R}$.

(A) Quante soluzioni ha (E)?

Infinite: ogni problema di Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{x} + \sin(t)\dot{x} + \cos(t) x = 0 \\ x(0) = A \\ \dot{x}(0) = B \end{cases}$$

ha una soluzione e posso scegliere $A, B \in \mathbb{R}$ in infinite maniere. Per diversi valori di $(A,B) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, le soluzioni sono distinte, quindi abbiamo infinite soluzioni di (E).

(B) Quante soluzioni ha (E) che soddisfano $y(0) = 0$?

Infinite: ogni problema di Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{x} + \sin(t) \cdot \dot{x} + \cos(t) x = 0 \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = A \end{cases}$$

ha una soluzione e posso scegliere $A \in \mathbb{R}$ in infinite maniere

(C) Quante soluzioni φ di (E) soddisfano $\dot{\varphi}(0)=1$?

Infinite: si argomenta come in (A), (B), usando il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{x} + \sin(t)\,\dot{x} + \cos(t)\cdot x = 0 \\ x(0) = A \\ \dot{x}(0) = 1 \end{cases} \qquad \text{con } A \in \mathbb{R}$$

(D) Esistono soluzioni distinte di (E) che coincidono su $[0,\pi]$?

No. Siano φ, ψ soluzioni di (E) che coincidono su $[0,\pi]$ e siano $a = \varphi(\pi/2) = \psi(\pi/2)$ e $b = \varphi'(\pi/2) = \psi'(\pi/2)$ ($\varphi'(\pi/2) = \psi'(\pi/2)$ poiché $\varphi(t) = \psi(t)$ $\forall t \in [0,\pi] = [\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}]$).

Il problema di Cauchy

$$(*)\begin{cases} \ddot{x} + \sin(t)\cdot\dot{x} + \cos(t)\,x = 0 \\ x(\frac{\pi}{2}) = a \\ \dot{x}(\frac{\pi}{2}) = b \end{cases}$$

ha allora le soluzioni φ, ψ. Ma $(*)$ ha un'unica soluzione; quindi $\varphi = \psi$, cioè $\varphi(t) = \psi(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$, cioè, φ e ψ non possono essere distinte.

Equazione in $\mathbb{C}$. $(z^3+3+5i)\cdot(z^2-(1+i)3z+9i)=0$.

$z^3=-3-5i=\sqrt{(-3)^2+(-5)^2}\cdot e^{i\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{-5}{-3}\right)+\pi\right)}=$

(ho aggiunto π poiché $\operatorname{Re}(-3-5i)=-3<0$).

$=\sqrt{34}\cdot e^{i(\operatorname{arctg}(5/3)+\pi)}$

$$\boxed{z=\sqrt[6]{34}\cdot\left[\cos\left(\frac{\operatorname{arctg}(5/3)+\pi+2k\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\operatorname{arctg}(5/3)+\pi+2k\pi}{3}\right)\right]\quad k=0,1,2}$$

$z^2-3(1+i)z+9i=0$ $\quad\Delta=(3\cdot(1+i))^2-4\cdot 9i=$

$=9(1-1+2i)-36i=-18i$

Posso procedere in due maniere.

Elegans. Ho già calcolato $(1+i)^2=2i$, quindi

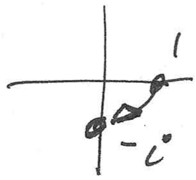
$-18i=-9\cdot 2i=-9\cdot(1+i)^2=i^2 3^2(1+i)^2$,

da cui $z=\dfrac{3(1+i)\pm i\cdot 3\cdot(1+i)}{2}=\dfrac{3}{2}[(1+i)\pm(i-1)]$

$=\begin{cases}\frac{3}{2}2i=3i\\ \frac{3}{2}2=3\end{cases}$ $\quad\boxed{z=3,\ 3i}$

Rusticus. Risolvo $w^2=-18\cdot i=18\cdot e^{-\frac{\pi}{2}i}$,

$w=\pm\sqrt{18}\cdot e^{-\pi/4\, i}$



$z=\dfrac{3(1+i)\pm\sqrt{18}[\cos(-\pi/4)+i\sin(-\pi/4)]}{2}$

$=\dfrac{3(1+i)\pm\sqrt{18}\cdot(1/\sqrt{2}-i\cdot 1/\sqrt{2})}{2}$

$=\dfrac{3(1+i)\pm 3(1-i)}{2}=\begin{cases}3\\3i\end{cases}$

Equazione differenziale (TB) 4

(E) $\ddot{x} + 9x = -\frac{1}{2}\sin(3t) - \frac{1}{3}e^{3t}$

(E0) $\ddot{z} + 9z = 0$ (omogenea associata)

$\lambda^2 + 9 = 0$ (equazione caratteristica) : $\lambda^2 = -9 = i^2 3^2$, $\lambda = \pm 3i$

$z(t) = A\cdot\cos(3t) + B\cdot\sin(3t)$, $t \in \mathbb{R}$: integrale generale di (E0)

con $A, B \in \mathbb{R}$

Risolvo $\ddot{x} + 9x = -\frac{1}{3}e^{3t}$: provo con $x(t) = c\cdot e^{3t}$

$\ddot{x}(t) = 9c\cdot e^{3t}$

$-\frac{1}{3}e^{3t} \overset{\text{⚹}}{=} \ddot{x} + 9x = 9c\cdot e^{3t} + 9c\cdot e^{3t} = 18\cdot c\cdot e^{3t} \iff c = -\frac{1}{\cancel{38}\,48}$

$x(t) = -\frac{1}{48}e^{3t}$

Risolvo $\ddot{x} + 9x = -\frac{1}{2}\cdot\sin(3t)$: il termine noto è soluzione dell'omogenea, ho risonanza.

Provo con $x(t) = t[C\cos(3t) + D\cdot\sin(3t)]$

$\dot{x}(t) = C\cdot\cos(3t) + D\cdot\sin(3t) + 3t\cdot[-C\cdot\sin(3t) + D\cdot\cos(3t)]$

$\ddot{x}(t) = \cancel{-6C\cos(3t)}\ [-3C\cdot\sin(3t) + 3D\cdot\cos(3t)]\cdot 2 - 9t\cdot[C\cdot\cos(3t) + D\cdot\sin(3t)]$

$\ddot{x} + 9x = 6\cdot[-C\cdot\sin(3t) + D\cdot\cos(3t)] \overset{\text{⚹}}{=} -\frac{1}{2}\cdot\sin(3t)$

$\iff D = 0,\quad -6C = -\frac{1}{2} \iff D = 0,\ C = \frac{1}{12}.$

$x(t) = \frac{t}{12}\cdot\cos(3t)$

L'integrale generale di (E) è

$$\boxed{x(t) = A\cdot\cos(3t) + B\cdot\sin(3t) - \frac{1}{48}e^{3t} + \frac{t}{12}\cdot\cos(3t)}$$

Derivata di composizioni.

$$g(x,y) = f(2xy,\ x\cdot e^{3y},\ 5\sin(x))$$

sia $f = f(v, \mathrm{v}, z)$:

$$\partial_y g(x,y) = \partial_v f(2xy, x\cdot e^{3y}, 5\sin(x))\cdot \partial_y(2xy)$$
$$+\ \partial_{\mathrm{v}} f(2xy, x\cdot e^{3y}, 5\sin(x))\cdot \partial_y(x\cdot e^{3y})$$
$$+\ \partial_z f(2xy, x\cdot e^{3y}, 5\sin(x))\cdot \partial_y(5\sin(x))$$
$$= \partial_v f(2xy, x\cdot e^{3y}, 5\sin(x))\cdot 2x + \partial_{\mathrm{v}} f(2xy, x\cdot e^{3y}, 5\sin(x))\cdot 3x e^{3y}$$
$$\Rightarrow \partial_y g(1,0) = \partial_v f(0,1,5\sin(1))\cdot 2 + \partial_{\mathrm{v}} f(0,1,5\sin(1))\cdot 3$$

Punti critici.

$$f(x,y) = (x-y)\cdot(x^2+5y^2-4)$$

$$\begin{cases} \partial_x f(x,y) = x^2+5y^2-4+2x(x-y) \\ \partial_y f(x,y) = -(x^2+5y^2-4)+10y\cdot(x-y) \end{cases}$$

Voglio $\begin{cases} \partial_x f(x,y) = 0 \\ \partial_y f(x,y) = 0 \end{cases}$. sommando le due equazioni:

$$0 = (2x+10y)(x-y)$$

sse $x = y$ o $x = -5y$

$$\begin{cases} x = y \\ x^2+5y^2-4+2x(x-y) = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x = -5y \\ x^2+5y^2-4+2x(x-y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y \\ 6x^2-4 = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x = -5y \\ 25y^2+5y^2-4-10y(-6y) = 0 \end{cases}$$

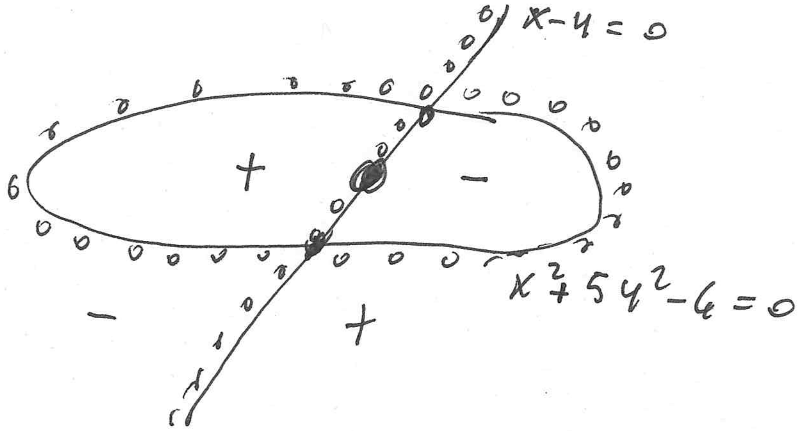
$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \\ y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -5y \\ 90y^2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \pm\sqrt{\frac{2}{45}} = \pm\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{5}} \\ x = -5\left(\pm\sqrt{\frac{2}{45}}\right) = \mp\frac{\sqrt{10}}{3} \end{cases}$$

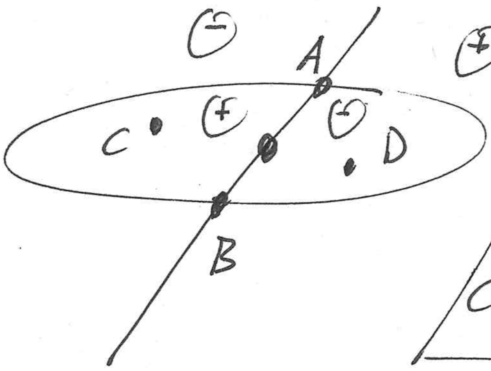
Punti Critici: $A = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, $B = \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$,

$C = \left(-\frac{\sqrt{10}}{3}, \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$, $D = \left(\frac{\sqrt{10}}{3}, -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$

Poichè il segno di f è come in figura:



usando il buon senso, Weierstrass e Fermat posso localizzare A, B, C, D come segue:



e dedurre che

A, B: p.ti sella
D: p.to min. rel
C: p.to max. rel.

Se no, faccio di conti:

$$\mathrm{Hess}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x-2y & 10y-2x \\ 10y-2x & -30y+10x \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Hess}\, f\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}, \sqrt{\tfrac{2}{3}}\right) = \begin{pmatrix} 4\sqrt{2/3} & * \\ * & -20\sqrt{2/3} \end{pmatrix}$$

ha det. negativo, autovalori di segno opposto: A è sella

$\mathrm{Hess}\, f\left(-\sqrt{2/3}, -\sqrt{2/3}\right) = \ldots$ B è sella per motivi analoghi

$$\mathrm{Hess}\, f\left(-\tfrac{\sqrt{10}}{3}, \tfrac{1}{3}\sqrt{\tfrac{2}{5}}\right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -6\sqrt{10}-2\sqrt{\tfrac{2}{5}} & 2\sqrt{10}+10\sqrt{2/5} \\ 2\sqrt{10}+10\sqrt{2/5} & -10\sqrt{10}-30\sqrt{2/3} \end{pmatrix}$$

determinante >0, $-6\sqrt{10}-2\sqrt{2/5} < 0 \Rightarrow$ def. neg. $\Rightarrow$ C è p.to max. rel.

Con (quasi) gli stessi conti: D è p.to min. rel.