(1) Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(n^{n^2}\cdot 2^{n^4}\right)}{n^3\log(n) + \log\left(\frac{1}{n^n}\right)}$

(2) Siano $f, g : [-1,1] \to \mathbb{R}$; $f(0) = 1 = g(1)$; $g(0) = -1 = f(1)$; f continua. Quali delle seguenti affermazioni segue necessariamente dalle ipotesi?

(i) $\exists x \in [-1,1] : f(x) = g(x) = 0$

(ii) $\exists x \in [-1,1] : g(x) = 0$

(iii) $\exists x \in [-1,1] : f(x)\cdot g(x) = 0$

(iv) $\exists x_M \in [-1,1] : \forall x \in [-1,1] \Rightarrow f(x)\cdot g(x) \le f(x_M)\cdot g(x_M)$

(3) Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{se } x \le -\pi/2 \\ ax+b & \text{se } -\pi/2 < x < \pi/2 \\ \cos(x) & \text{se } x \ge \pi/2 \end{cases}$$

Trovare a, b in modo che $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Per quei valori di a, b, tracciare la parte del grafico di f per cui $-2\pi \le x \le 2\pi$.

(4) (i) Per quanti punti $x \in [-\pi, 4\pi)$ si ha che $\cos(2x) = 1/3$?

(ii) Trovare le soluzioni di cui al punto (i), esplicitamente (usando, suggerisco, la funzione arccos).

AM2 - 28/10/2011 test di prova.

(1) Classificare i punti critici ~~della~~ della funzione

$$f(x,y) = (2x-y+1)\cdot(2x+y-1)\cdot y+1.$$

(2) Siano $f, \alpha, \beta \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ e sia $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$h(x,y) = f\big(\alpha(x,y)+\beta(x,y);\ \alpha(x,y)\cdot\beta(x,y)\big).$$

Calcolare $\nabla f(x,y)$.

(3) Siano $\varphi(x)=x$, $\psi(x)=x^3$; $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(i) $\varphi, \psi \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Sono linearmente indipendenti?

(ii) Siano $a, b \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ e $x_0 \in \mathbb{R}$.

Risolvere

$$(PC)\begin{cases} y'' + a(x)\, y' + b(x)\, y = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \end{cases}$$

(iii) Esistono $a, b \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ in modo che φ e ψ in (i) ~~sono~~ soluzioni di

$$(E)\quad y''+a(x)\,y'+b(x)\,y=0\ ?$$

(iv) Esistono $a, b \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ in modo che ψ in (i) sia soluzione di (E)?

(4) Sia f la funzione in (1). Scrivere la formula di Taylor al II ordine per f in $(0,0)$ e il piano tangente al grafico di f in $(0,0)$.