AM1 - Test di Prove - 21/11/2011

(1) Calcolare $\lim_{n\to\infty} \Big[3\cdot \frac{n^2 3^n + n^3\cdot 2^n}{n^5\cdot 2^n + (n\cdot\sqrt{3}^{\,n})^2} + 5\cdot n\cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

(2) Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivabile e sia $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$h(x) = e^{3\cdot f(\log(1+5x^2))} + f(x).$$

Calcolare $h'(x)$.

(3) Calcolare $\lim_{x\to 0} x^{\frac{3}{\log(x)}}$

(4) Siano $f, g:[-1,1]\to\mathbb{R}$ continue e sia $f(0)=g(0)+1$, $f(1)=g(1)+1$.
Quali delle seguenti affermazioni seguono <u>necessariamente</u> dalle ipotesi?

(i) $\forall x\in[-1,1] \Rightarrow f(x)>g(x)$

(ii) $\exists x\in(-1,1):\ f(x)\le g(x)$

(iii) $\exists x_1, x_2:\ -1<x_1<0<x_2<1$ e $f(x_1)>g(x_1),\ f(x_2)>g(x_2)$

(iv) L'equazione $f(x)=g(x)$ ha un numero pari (eventualmente nullo) di soluzioni.

(5) Calcolare inf e sup dei seguenti insiemi. Dire se si tratta di minimi o massimi.

$A=\{x:\ 0\le \sin(x)\le 1/2\}$; $B=\{x:\ x\ge 0$ e $0\le\sin(x)\le 1/2\}$

$C=\{x:\ -\pi\le x\le\pi$ e $0\le \sin(x)\le 1/2\}$; $D=\{\sin(x):\ -\pi\le x\le\pi\}$

AM2 – Test di Prova – 21/11/2011

(1) Classificare i punti critici di
$$f(x,y) = (y^2 - x^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) + 3$$

(2) Trovare l'integrale generale di
$$y'' + y' + y = f(x)$$
dove $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. (La soluzione dipende da f!).

(3) Sia $u \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $u = u(x,y)$, e si ponga $v(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

(3.1) Calcolare $\mathrm{Hess}\, v(r,\theta)$.

(3.2) Scrivere $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(r\cos\theta, r\sin\theta)$

~~ulti~~ in funzione degli elementi di $\mathrm{Hess}\, v(r,\theta)$ [FACOLTATIVO].

(4) Scrivere la formula di Taylor al II ordine per la funzione f in (1) nel punto $(0,1)$.
Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f in $(0,1)$.

(5) Siano $a, b \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e si consideri l'equazione differenziale

(E) $\quad y'' + a(x)\cdot y' + b(x)\cdot y = 1.$

Quale delle seguenti affermazioni è certamente vera

(i) Se $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sono soluz. di (E), allora una di esse è combinazione lineare delle altre due.

(ii) Esistono soluzioni $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ di (E) t.c. $\varphi_3 - \varphi_1$ e $\varphi_2 - \varphi_1$ sono linearmente indip.

Motivare la risposta.