① Sia $f(x) = \int_0^{x^2-x} (t^2-1)\cdot e^{-t^2}\,dt$. Studiare f.

(1.1) Trovare Dominio(f) e i punti su cui f è continua.

(1.2) Calcolare i limiti di f agli estremi degli intervalli su cui f è continua (dire se sono finiti o infiniti)

(1.3) Calcolare $f'(x)$ e trovare Dominio(f')

(1.4) Trovare gli intervalli su cui f cresce/decresce.

(1.5) Tracciare un grafico qualitativo di f.

② Determinare i valori di $\gamma \geq 0$ per cui

$$\int_0^{+\infty} \frac{|t^2-1|\cdot e^{-t^2}}{t^\gamma}\,dt \quad \text{converge.}$$

③ Calcolare $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{x}{e^x-x} - \sin(x)}{x\cdot(e^{2x^2}+1)(e^{2x^2}-1)}$$

④ Trovare le soluzioni $z\in\mathbb{C}$ di $(1+i)z^3 = 1-i$

⑤ Calcolare $$\int_{e+e^{-1}}^{e^2+e^{-2}} \frac{x\cdot\log\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$$

⑥ Sia $H(x) = \int_0^x \left[x\cdot e^{-t^2} + t\cdot\sin(t^2)\right]dt$, $x\in\mathbb{R}$.

Calcolare $H'(x)$ e $H'(1)$.

AM I - 15/12/2011 - Test di Prova.

(1) Sia $\Omega = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; z^2 \geq \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 4 ; \; |z| \geq 1 ; \; \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \geq 1 \}$

(1.1) Tracciare un disegno qualitativo di Ω

(1.2) Parametrizzare $\partial\Omega$ e dire se le parametrizzazioni sono compatibili con la normale esterna ν.

(1.3) Scrivere la formula che esprime

$$\iint_{\partial\Omega} F \cdot \nu \, d\sigma ,$$

dove $F \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$

(1.4) Scrivere la formula che esprime $\iint_{\Sigma^*} F \cdot \nu \, d\sigma$,

dove $F \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ e $\Sigma^* = \{ (x,y,z) \in \partial\Omega : \; z^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 4 \}$

(1.5) Calcolare i flussi in (1.3) e (1.4) per

$$F(x,y,z) = (x, 0, z)$$

(1.6) Sia Σ^* la superficie in (1.4) e sia $\partial\Sigma^*$ il suo bordo, e sia μ l'orientamento opposto a ν su Σ^*.

Sia $G(x,y,z) = \left(\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} , \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} , z \right)$.

Calcolare $\int_{(\partial\Sigma^*; \mu)} G(s) \cdot ds$

(2) Calcolare $\iint_A x \, dx \, dy$ con $A = \{ (x,y) : \; 0 \leq x \leq 2\pi ; \; 0 \leq y \leq x + \sin(x) \}$

(3) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ il campo

$$F(x,y) = \left(e^{ax} \cdot \sin(y) , \; e^{x} \cdot \cos(ay) \right)$$

è chiuso? Calcolarne un potenziale.

AM II – 15/12/2011 – Test di Prova.