AM1 – Test Prove 14/10/2014

① $\dfrac{2^{3n+2}+3^{2n+3}}{8^n\cdot n^8+9^n} = \dfrac{2^2\cdot(2^3)^n+3^3\cdot(3^2)^n}{8^n\cdot n^8+9^n}$

$= \dfrac{9^n}{9^n}\cdot\dfrac{4\cdot(8/9)^n+27}{n^8/(9/8)^n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 27$

poiché $9/8>1 \Rightarrow \dfrac{n^8}{(9/8)^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\sqrt[3]{n^3+n^2}-\sqrt[3]{n^3+n} =$ (uso $A^3-B^3=(A-B)\cdot(A^2+AB+B^2)$)

$= \dfrac{(n^3+n^2)-(n^3+n)}{(n^3+n^2)^{2/3}+(n^3+n^2)^{1/3}\cdot(n^3+n)^{1/3}+(n^3+n)^{2/3}}$

$= \dfrac{n^2-n}{n^2\cdot(1+1/n)^{2/3}+n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/3}\cdot n\cdot\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{1/3}+n^2\cdot\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{2/3}}$

$= \dfrac{n^2}{n^2}\cdot\dfrac{1-1/n}{(1+o(1))^2+(1+o(1))\cdot(1+o(1))+(1+o(1))^2}$

$\xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{3}$

Quindi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3\cdot 27+\dfrac{5}{3}$

$= \dfrac{248}{3}$

② (i) V (ii) F (iii) V (iv) F.

P.es., motivo (iii): se $f$ cresce e $g$ decresce, allora, $\forall x\le y$ in $\mathbb{R}$:

$f(x)\le f(y)$ (perché $f$ cresce)

$\Rightarrow (g\circ f)(x) = g(f(x)) \ge g(f(y)) = (g\circ f)(y)$, perché $g$ decresce.

Dunque, $g\circ f$ decresce.

③ • $x\in A \Leftrightarrow x^2>3 \Leftrightarrow x<-\sqrt{3}$ o $x>\sqrt{3}$:

$\inf A=-\infty$ e $A$ non ha minimo

• $x\in B \Leftrightarrow \begin{cases} x^2>3 \\ x\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow x>\sqrt{3}$

$\inf B=\sqrt{3}\notin B$: $B$ non ha minimo

• $x\in C \Leftrightarrow \begin{cases} x^2\ge 3 \\ x\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow x\ge\sqrt{3}$

$\inf C=\sqrt{3}=\min C$

• $x\in D \Leftrightarrow \begin{cases} x^2\ge 3 \\ x\ge 0\end{cases}$ e $x\in\mathbb{Q} \Leftrightarrow x\ge\sqrt{3}$ e $x\in\mathbb{Q}$

$\inf D=\sqrt{3}\notin D$ (perché $\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$), quindi $D$ non ha minimo.

AM1 – Test di Prova 20/10/2011

① $\sqrt{(n^2+1)^3+n^5} - n^3 =$

$= [n^6+n^5+o(n^5)]^{1/2} - n^3 =$

$= n^3 \cdot \left[\left(1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{1/2} - 1\right]$

$= n^3 \cdot \dfrac{1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)-1}{\left(1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{1/2}+1}$

$= n^3 \cdot \dfrac{\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{(1+o(1))^{1/2}+1}$

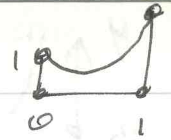
$= n^2 \cdot \dfrac{1+o(1)}{2+o(1)}$

Quindi $\dfrac{\sqrt{(n^2+1)^3+n^5} - n^3}{n^\alpha} =$

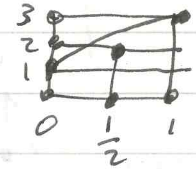
$= \dfrac{n^2\cdot[1+o(1)]}{n^\alpha\cdot(2+o(1))} = n^{2-\alpha}\cdot\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)$

$\xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha<2 \\ 1/2 & \text{se } \alpha=2 \\ 0 & \text{se } \alpha>2 \end{cases}$

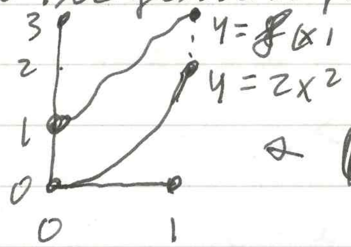
② (iv) è in genere falsa



(Dalle ipotesi segue che $f$ non è decrescente, non che è crescente!).



(i) è in genere falsa




(ii) è in genere falsa.

(iii) è vera. Per T. Weierstrass, $f$ ha un punto di massimo assoluto in $[0,1]$, $x_M\in[0,1]$.
Poiché $f(0)<f(1)$, $x_M\neq 0$ (0 non può essere punto di MAX.), quindi $x_M\in(0,1]$.

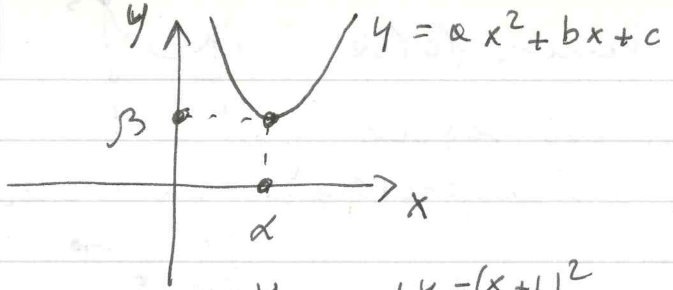
③ Diverse maniere per farlo. Eccone una:

$y = ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) =$

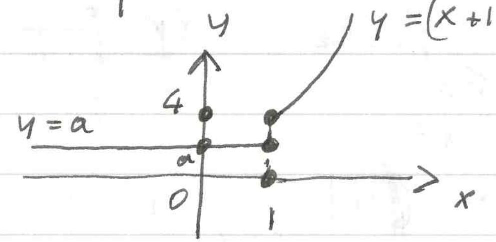
$= a\left[x^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]$

$= a\cdot\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$:

$y+\dfrac{b^2-4ac}{4a} = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$: $\begin{cases} \alpha = -b/2a \\ \beta = -(b^2-4ac)/4a \\ k = 1/\sqrt{a} \end{cases}$




④




$f$ è continua $\iff a = 4$.

<u>Dim.</u> Sia $\{x_n\}$ una successione in $(1, +\infty)$:

$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = 4 = a = f(1) \iff a = 4.$

Se $\{x_n\}$ sta in $(-\infty, 1]$, $f(x_n) = a \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} a$.

Quindi, $f$ è continua in $x = 1 \iff a = 4$.

D'altra parte, $f$ è continua in $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ per ogni valore di $a$. ∎

AM1 - Test di prove 27/10/2011.

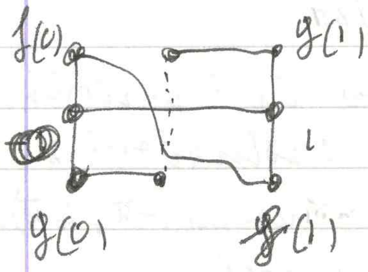
① $$\frac{\log\left(n^{n^2} \cdot 2^{n^4}\right)}{n^3 \cdot \log(n) + \log\left(\frac{1}{n^n}\right)} =$$

$$= \frac{n^2 \cdot \log(n) + n^4 \cdot \log(2)}{n^3 \cdot \log(n) - n \cdot \log(n)} =$$

$$= \frac{n^4}{n^3 \cdot \log(n)} \cdot \frac{\log(2) - \log(n)/n^2}{1 - 1/n^2}$$

$$= \frac{n}{\log(n)} \cdot \frac{\log(2) + o(1)}{1 + o(1)} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$$

② Il problema è che nulla si sa sulla continuità di $g$.




(iii) è vera: $\exists x \in (0,1)$ (quindi in $[-1,1]$) t.c. $f(x) = 0$; quindi $\exists x \in [-1,1]$: $f(x)\, g(x) = 0$.

(ii) è falsa: $g$ può "saltare" $y = 0$. A maggior ragione è falsa (i).

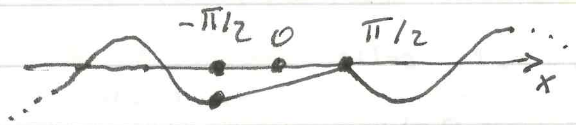
(iv) è falsa. Non posso usare T. Weierstrass perché $f \cdot g$ non è necessariamente continua. Si possono trovare controesempi.

(3) $\sin(-\pi/2) = -1$, quindi voglio
che $a(-\pi/2) + b = -1$

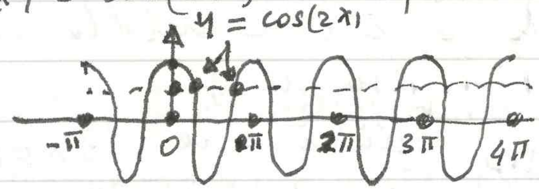
e $\cos(\pi/2) = 0$, quindi $a(\pi/2) + b = 0$:

$$\begin{cases} -a\pi/2 + b = 1 \\ a\pi/2 + b = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2b = 1 \\ a\pi/2 + b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 1/2 \\ a = -1/\pi \end{cases} ; \quad f(x) = -\frac{x}{\pi} + \frac{1}{2} \quad \text{se} \quad |x| < \pi/2$$




(4) $f(x) = \cos(2x)$ ha periodo $2\pi/2 = \pi$




L'intervallo è composto di 5 periodi
e per ogni periodo ho 2 soluzioni:
$\cos(2x) = 1/3$ ha $2 \times 5 = 10$ soluz. in $[-\pi, 4\pi)$.
Una soluzione è $x = \frac{1}{2}\arccos(1/3)$,
un'altra è $x = \pi - \frac{1}{2}\arccos(1/3)$.
Usando la periodicità ho le soluzioni:

$x = \frac{1}{2}\arccos(1/3) + k\pi$ ; $k = \cancel{-1}, 0, 1, 2, 3$

$x = \pi - \frac{1}{2}\arccos(1/3) + k\pi$ ; $k = 0, 1, 2, 3, 4$