① $g(x,y,z) = f(x^2y, xyz+x)$. Posto $f = f(u,v)$,

$$\partial_x g(x,y,z) = \partial_u f(x^2y; xyz+x)\cdot 2xy + \partial_v f(x^2y; xyz+x)\cdot(yz+1)$$

$$\partial_y g(x,y,z) = \partial_u f(x^2y; xyz+x)\cdot x^2 + \partial_v f(x^2y; xyz+x)\cdot xz$$

$$\partial_z g(x,y,z) = \partial_v f(x^2y; xyz+x)\cdot xy; \quad \nabla g = (\partial_x g, \partial_y g, \partial_z g)$$

② $f(x,y) = x\cdot e^{-x^2-y^2}$

$$\nabla f(x,y) = \left((1-2x^2)e^{-x^2-y^2}; -2xy\cdot e^{-x^2-y^2}\right)$$

$$\nabla f(1,-1) = (-e^{-2}; 2\cdot e^{-2}); \quad f(1,-1) = e^{-2}.$$

Formula di Taylor I ordine in $(1,-1)$:

$$f(1+h,-1+k) = e^{-2} - e^{-2}\cdot h + 2\cdot e^{-2}\cdot k + \underset{(h,k)\to(0,0)\text{ in }\mathbb{R}^2}{o}\left((h^2+k^2)^{1/2}\right)$$

$$= e^{-2} + (-e^{-2}, 2e^{-2})\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \underset{(h,k)\to(0,0)\text{ in }\mathbb{R}^2}{o}\left((h^2+k^2)^{1/2}\right)$$

Piano tangente al grafico di f in $(1,-1)$:

$$z - e^{-2} = -e^{-2}(x-1) + 2\cdot e^{-2}\cdot(y+1); \quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$$

Spazio vettoriale tangente in $(1,-1)$:

$$z = -e^{-2}\cdot x + 2\cdot e^{-2}\cdot y \quad ; \quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$$

Una base è $\{(1,0,-e^{-2}); (0,1,2\cdot e^{-2})\}$

Differenziale di f in $(1,-1)$: $z = d_{(1,-1)}f\,(h,k) = -e^{-2}\cdot h + 2\cdot e^{-2}\cdot k$

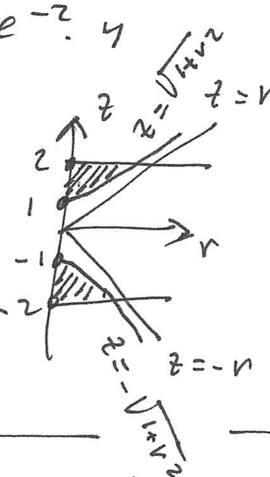
Piano tangente al grafico di $d_{(1,-1)}f$ in $(h,k)=(0,0)$:
è lo spazio tangente, ovviamente:

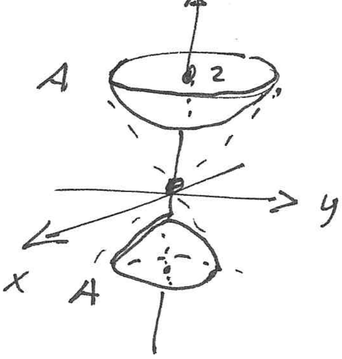
$$z = -e^{-2}\cdot x + 2\cdot e^{-2}\cdot y$$

③ $A = \{1+x^2+y^2 \le z^2 \le 4\}$

Pongo $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ con $r\ge 0$, $\theta\in\mathbb{R}$:

$1+r^2 \le z^2 \le 4$





A è chiuso, limitato, non è connesso per archi.

AM2 – 20/10/2011

(1) $f(x,y) = (x^2-y^2-1)\cdot(x-2)+1$

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2x(x-2) + x^2-y^2-1 \\ f_y(x,y) = -2y(x-2) \end{cases}$$

$f_y(x,y)=0 \iff y=0$ o $x=2$ quindi

$\nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} y=0 \\ 3x^2-4x-1=0 \end{cases}$ o $\begin{cases} x=2 \\ 3-y^2=0 \end{cases}$

P.ti critici: $(2,\sqrt{3})$, $(2,-\sqrt{3})$, $\left(\frac{2+\sqrt{7}}{3},0\right)$, $\left(\frac{2-\sqrt{7}}{3},0\right)$

$$\mathrm{Hess}\, f(x,y) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x-4 & -2y \\ -2y & -2(x-2) \end{bmatrix}$$

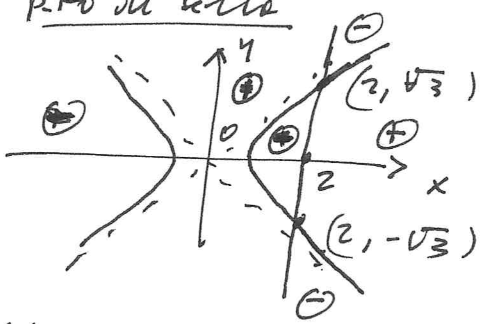
$\mathrm{Hess}\, f(2,\pm\sqrt{3}) = \begin{bmatrix} * & * \\ * & 0 \end{bmatrix}$ con $* = f_{xy}(2,\pm\sqrt{3}) \neq 0$, quindi la matrice ha det. neg. $\Rightarrow (2,\pm\sqrt{3})$ p.ti di sella.

$$\mathrm{Hess}\, f\left(\frac{2\pm\sqrt{7}}{3};0\right) = \begin{bmatrix} 2(2\pm\sqrt{7})-4 & 0 \\ 0 & -2\left(\frac{2\pm\sqrt{7}}{3}-2\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \pm 2\sqrt{7} & 0 \\ 0 & -2\cdot\frac{-4\pm\sqrt{7}}{3} \end{bmatrix};$$ $\mathrm{Hess} f\left(\frac{2+\sqrt{7}}{3};0\right)$: def. pos. $\left(\frac{2+\sqrt{7}}{3};0\right)$: p.to min. rel.

$\mathrm{Hess} f\left(\frac{2-\sqrt{7}}{3};0\right)$: non def. $\Rightarrow \left(\frac{2-\sqrt{7}}{3};0\right)$ p.to di sella

OSS. $(x^2-y^2-1)\cdot(x-2)=0$ su



Dal segno dell'espressione risulta chiaramente che

(i) $(2,\pm\sqrt{3})$ sono punti di sella

(ii) per T. Weierstrass, c'è un punto di minimo relativo nella regione limitata compresa tra il ramo destro dell'iperbole $x^2-y^2-1=0$ e la retta $x-2=0$.

(2) $g(r,\theta)=(f\circ F)(r,\theta)=f(F(r,\theta))=f(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$$\Rightarrow \begin{cases} g_r(r,\theta)=f_x(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot\cos\theta+f_y(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot\sin\theta \\ g_\theta(r,\theta)=-f_x(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot r\sin\theta+f_y(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot r\cos\theta \end{cases}$$

Ricavo f_x, f_y in funzione di g_r, g_θ: è un sistema con due equazioni lineari nelle incognite f_x, f_y.
Uso Cramer (p. es.):

$$f_x(r\cos\theta, r\sin\theta)=\frac{\begin{vmatrix} g_r(r,\theta) & \sin\theta \\ g_\theta(r,\theta) & r\cos\theta\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}}=\frac{g_r(r,\theta)r\cos\theta-g_\theta(r,\theta)\sin\theta}{r}$$

$$f_y(r\cos\theta, r\sin\theta)=\frac{\begin{vmatrix} \cos\theta & g_r(r,\theta) \\ -r\sin\theta & g_\theta(r,\theta)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}}=\frac{g_\theta(r,\theta)\cos\theta+g_r(r,\theta)\cdot r\cdot\sin\theta}{r}$$

$$\Rightarrow \|\nabla f(r\cos\theta, r\sin\theta)\|^2=\partial_x f(r\cos\theta, r\sin\theta)^2+\partial_y f(r\cos\theta, r\sin\theta)^2$$
$$=\left(g_r(r,\theta)\cos\theta-g_\theta(r,\theta)\cdot\frac{\sin\theta}{r}\right)^2+\left(g_r(r,\theta)\sin\theta+g_\theta(r,\theta)\frac{\cos\theta}{r}\right)^2$$
$$=g_r(r,\theta)^2+g_\theta(r,\theta)^2\cdot\frac{1}{r^2}:$$

$$\boxed{\|\nabla f(r\cos\theta, r\sin\theta)\|^2=g_r(r,\theta)^2+\frac{1}{r^2}g_\theta(r,\theta)^2.}$$

(3) $h'(t)=f_x(\cos t,\sin t,t)(-\sin t)+f_y(\cos t,\sin t,t)\cdot\cos t$
$\quad+f_z(\cos t,\sin t,t)$ se $f=f(x,y,z)$.

(4) (i) è falsa perché non sappiamo se $f_x, f_y\in C(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$.
(ii) è falsa (abbiamo visto un controesempio in aula).
(iii) ~~Dalle~~ ipotesi, $f\in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, quindi $f\in C(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$.
La regione $A:\{(x,y): x^2+y^2\le 1\}$ è chiusa e limitata, quindi vale il T. di Weierstrass $\Rightarrow f$ ha un p.to di MAX. (x_0,y_0) in A $\Rightarrow$ (iii) è vera.
(iv) $\{(x,y): x^2-y^2\le 1\}$ non è limitato: (iv) è falsa.

AM2 - 28/10/2011.

① $f(x,y) = (2x-y+1)\cdot(2x+y-1)\cdot y + 1$

$f_x(x,y) = 2\,(2x+y-1)\cdot y + (2x-y+1)\cdot 2\cdot y = 2y\cdot 4x$

$f_y(x,y) = -(2x+y-1)\cdot y + (2x-y+1)\cdot y + (2x-y+1)(2x+y-1)$

$= 2y(1-y) + 4x^2 - (1-y)^2 = (1-y)(3y-1+4x^2)$

$f_x(x,y) = 0 \iff x = 0$ o $y = 0$.

$$\begin{cases} x = 0 \\ 0 = -(y-1)y + (-y+1)y + (y-1)(-y+1) = 2y(1-y) - (1-y)^2 = (1-y)\cdot(3y-1) \end{cases}$$

o $\begin{cases} y = 0 \\ (2x+1)(2x-1) = 0 \end{cases}$

P.ti critici: $(0,1)$; $(0,1/3)$; $(-\frac{1}{2},0)$; $(\frac{1}{2},0)$.

$$\text{Hess} f(x,y) = \begin{bmatrix} 8y & 8x \\ 8x & -(3y-1)+3(1-y) \end{bmatrix}$$

$\text{Hess} f(\pm\frac{1}{2};0) = \begin{bmatrix} 0 & * \neq 0 \\ * \neq 0 & * \end{bmatrix}$: non def. $\Rightarrow (\pm\frac{1}{2},0)$ p.ti di sella

$\text{Hess} f(0,1) = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$: non def. $\Rightarrow (0,1)$ p.to di sella

$\text{Hess} f(0,1/3) = \begin{bmatrix} 8/3 & 0 \\ 0 & 3\cdot(1-1/3) \end{bmatrix}$: def. pos. $\Rightarrow (0,1/3)$ p.to di minimo rel.

② $h(x,y) = f(\alpha(x,y)+\beta(x,y),\ \alpha(x,y)\cdot\beta(x,y))$.

Si può anche fare "graficamente" come a pag. 2

Se $f = f(u,v)$, allora

$h_x(x,y) = f_u(\alpha(x,y)+\beta(x,y),\ \alpha(x,y)\cdot\beta(x,y))\cdot[\alpha_x(x,y) + \beta_x(x,y)] +$
$+ f_v(\alpha(x,y)+\beta(x,y),\ \alpha(x,y)\cdot\beta(x,y))\cdot[\alpha_x(x,y)\cdot\beta(x,y) + \alpha(x,y)\cdot\beta_x(x,y)]$

$h_y(x,y)$ si ottiene da $h_x(x,y)$ scambiando α_x con α_y, β_x con β_y.

④ $f(x,y) = [4x^2 - (1-y)^2]\,y + 1 = 4x^2y - y - y^3 + 2y^2 + 1$

$= 1 - y + 2y^2 + o(x^2+y^2)$
$(x,y)\to(0,0)$ in $\mathbb{R}^2$.

$z = 1-y$ è l'equazione del piano tg. al grafico di f in $(0,0)$.

/ (i) $\varphi(x) = x$ e $\psi(x) = x^3$ sono lin. dip. $\Leftrightarrow$
$\exists a, b \in \mathbb{R}, (a,b) \neq (0,0)$, t.c. $\forall x \in \mathbb{R}$: $ax + bx^3 = 0$.
Cioè, il polinomio $P(x) = ax + bx^3$ è il polinomio nullo, ma ciò implica $a = b = 0$.
Allora, φ e ψ sono lin. indip.

(ii) Il (PC) ha una sola soluzione.
E' chiaro che $y(x) = 0$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ è una soluzione di (PC):
$y(x) = 0$ è la soluzione di (PC).

(iv) $\psi(x) = x^3$, $\psi'(x) = 3x^2$: $\psi(0) = \psi'(0) = 0$.
Se ψ fosse soluzione dell'eq. diff., allora sarebbe soluzione di (PC) in (ii), allora $x^3 = y(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$: assurdo.
Quindi ψ non può essere soluzione dell'eq. diff.

(iii) Per (iv), φ e ψ non possono essere soluzioni dell'eq. diff.