Prova scritta di Complementi di Analisi Matematica L-S
17 febbraio 2011

Nome..**Cognome**... **Matricola**.................

Scrivete solo le soluzioni e, se volete, i passaggi principali. Scrivete sul e consegnate solo il foglio degli esercizi.

(1) [6 pti] Sia $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^2(x)$. Trovare $\{c_n : \ n \in \mathbb{N}, \ n \geq 1\}$ in $\mathbb{C}$ tali per cui

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx) \text{ in } L^2([0, \pi]).$$

Suggerimento: usare la formula di de Moivre $e^{it} = \cos(t) + i \sin(t)$ può forse semplificare i calcoli.

(4) [6 pti] Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 su $\mathbb{R}$. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} 9t\partial_x u(x,t) - 4x\partial_t u(x,t) = 0 \text{ per } (x,t) \in \mathbb{R}^2; \\ u(x,0) = e^{-4x^2} \text{ per } x \geq 0. \end{cases}$$

(3) **[6 pti]** Calcolare $f(\zeta) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\zeta x}dx$ quando

$$f(x) = \begin{cases} i \text{ se } 1 \leq x \leq 2, \\ -i \text{ se } -2 \leq x \leq -1, \\ 0 \text{ altrimenti.} \end{cases}$$

[6 pti] Sia poi $u : \mathbb{R} \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la soluzione dell'equazione delle onde $\partial_{tt}u(x,t) = \partial_{xx}u(x,t)$ con le condizioni inziali $u(x,0) = f(x)$ e $\partial_t u(x,0) = 0$. Sia $g(x) = u(x,2)$. Calcolare $\hat{g}(\zeta)$ per $\zeta \in \mathbb{R}$.

(5) **[6 pti]** Trovare tutte le funzioni u tali che

$$\begin{cases} \partial_{tt}u(x,t) - \partial_{xx}u(x,t) = 0 \text{ per } (x,t) \in [0,\pi] \times [0,+\infty); \\ u(x,0) = 0 \text{ e } \partial_t u(x,\pi) = 0 \text{ per } x \in [0,\pi]. \end{cases}$$

CAMLS

(1) $c_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin^2(x)\cdot \sin(nx)\,dx =$

scelgo la via più semplice; ma si può fare altrimenti

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2\cdot\left(\frac{e^{nix}-e^{-nix}}{2i}\right)dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{-8i}\int_0^\pi \left(e^{2ix}-2+e^{-2ix}\right)\left(e^{nix}-e^{-nix}\right)dx$$

$$= \frac{i}{4\pi}\cdot\int_0^\pi \left[e^{(2+n)ix}-e^{-(2+n)ix}+e^{(n-2)ix}-e^{-(n-2)ix}-2\cdot\left(e^{nix}-e^{-nix}\right)\right]dx$$

$$= \frac{i}{4\pi}\cdot\left[\left(\frac{e^{(2+n)ix}+e^{-(2+n)ix}}{(2+n)i}\right)_0^\pi - 2\left(\frac{e^{nix}+e^{-nix}}{ni}\right)_0^\pi + \underbrace{\int_0^\pi\left(e^{(n-2)ix}-e^{-(n-2)ix}\right)dx}_{\text{vale 0 se } n=2}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\left[\frac{\cos((2+n)\pi)-1}{2+n} - 2\,\frac{\cos(n\pi)-1}{n} + \begin{cases} 0 & \text{se } n=2 \\ \dfrac{\cos((n-2)\pi)-1}{n-2} & \text{se } n\neq 2\end{cases}\right]$$

Per $n=2$, $c_n=0$. Per $n\in\mathbb{N}$, $n\neq 0,2$ ho che $\cos((2+n)\pi)=\cos(n\pi)=\cos((n-2)\pi)=(-1)^n$, quindi

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\cdot\left[(-1)^n-1\right]\cdot\left(\frac{1}{2+n}-\frac{2}{n}+\frac{1}{n-2}\right) = \frac{4}{2\pi}\,\frac{(-1)^n-1}{n(n^2-4)}$$

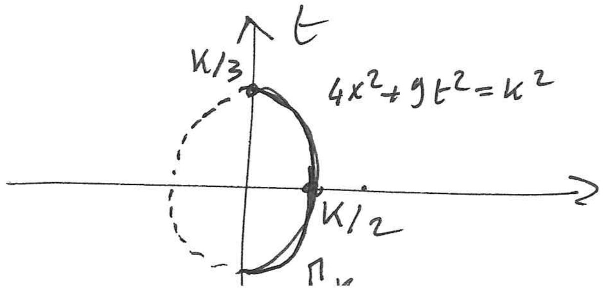
$$c_n = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n-1}{n\cdot(n^2-4)}$$ (inteso che sia $c_2=0$).

(2) Se $x=x(t)$, $\frac{d}{dt}v(x(t),t) = v_x(x,t)\,\dot{x} + v_t = v_x(x,t)\cdot\frac{-9t}{4x} + v_t(x,t)$

$\iff \frac{dx}{dt} = -\frac{9t}{4x} \iff 0 = 4x\,dx + 9t\,dt = d\left(\frac{4x^2+9t^2}{2}\right)$

Curve caratteristiche: $4x^2+9t^2=k^2\geq 0$ (le chiamo Γ_k)

$x(t) = \frac{1}{2}\sqrt{k^2-9t^2}$ (per avere $x(0)\geq 0$).



2

Sia $(x,t)\in\mathbb{R}^2$: $\Gamma_k \ni (x,t) \iff 4x^2+9t^2=k^2$.
$x>0$

Poichè $\frac{d}{dt} v(x(t),t)=0$; $v(x(t),t) = v(x(0),0) =$
$= e^{-4x(0)^2}$ e

$(x(0),0) = (\frac{k}{2},0)$ è il punto di ~~ascissa~~ ordinata nulla su Γ_k:

$$\Rightarrow v(x,t) = e^{-4x(0)^2} = e^{-4(k^2/4)} = e^{-k^2} = e^{-4x^2-9t^2}$$

$$\boxed{v:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad v(x,t)= e^{-4x^2-9t^2}}$$

(3) $\hat{f}(\xi) = i\left(-\int_{-2}^{-1} e^{-i\xi x}dx + \int_1^2 e^{-i\xi x}dx\right) = i\left[\left(\frac{e^{-ix\xi}}{-i\xi}\right)_1^2 - \left(\frac{e^{-ix\xi}}{-i\xi}\right)_{-2}^{-1}\right]$

$= \frac{i}{i\xi}\cdot\left(-e^{-2i\xi}+e^{-i\xi}+e^{i\xi}-e^{2i\xi}\right) = \frac{2\cos(\xi)-2\cos(2\xi)}{\xi}$

$= 2\,\frac{\cos(\xi)-\cos(2\xi)}{\xi}$;
$$\boxed{\hat{f}(\xi) = 2\cdot\frac{\cos(\xi)-\cos(2\xi)}{\xi}}$$

L'equazione delle onde $\partial_{tt}v(x,t) = \partial_{xx}v(x,t)$
la trasformo secondo Fourier ($\hat{v}(\xi,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} v(x,t)dx$):

$\partial_{tt}\hat{v}(\xi,t) = -\xi^2\cdot\hat{v}(\xi,t)$

Come già visto con l'equazione del calore, ciò implica che $\hat{v}(\xi,t) = A(\xi)\cdot\cos(\xi t) + B(\xi)\cdot\sin(\xi t)$.

Le condizioni iniziali sono:

$2\cdot\frac{\cos(\xi)-\cos(2\xi)}{\xi} = \hat{f}(\xi) = \hat{v}(\xi,0) = A(\xi)$ e

$0 = \partial_t\hat{v}(\xi,0) = \left[-\xi A(\xi)\cdot\sin(\xi t) + \xi B(\xi)\cos(\xi t)\right]_{t=0} = \xi\cdot B(\xi)$

Quindi: $\hat{v}(\xi,t) = 2\cdot\frac{\cos(\xi)-\cos(2\xi)}{\xi}\cdot\cos(\xi t)$ e

$\hat{g}(\xi) = \hat{v}(\xi,\pi) = 2\cdot\frac{\cos(\xi)-\cos(2\xi)}{\xi}\cdot\cos(\xi\pi)$

(5) Variabili separabili: $v(x,t) = \varphi(x)\cdot\psi(t)$,

$$0 = v_{tt} - v_{xx} = \varphi(x)\cdot\psi''(t) - \varphi''(x)\cdot\psi(t)$$

$$\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{R}: \quad \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = k = \frac{\psi''(t)}{\psi(t)} \quad \forall t, x.$$

Ho anche $0 = v(x,0) = \varphi(x)\cdot\psi(0)$ (quindi $\psi(0)=0$)

e $0 = v_t(x,\pi) = \varphi(x)\cdot\psi'(\pi)$ (quindi $\psi'(\pi)=0$).

Risolvo: $\begin{cases} \psi''(t) - k\psi(t) = 0 \\ \psi(0) = 0 = \psi'(\pi) \end{cases}$ Si vede che per $k \geq 0$ ho solo la soluzione banale $\psi \equiv 0$.

Per $k = -h^2$, $h \in \mathbb{R}$, ho: $\psi''(t) + h^2\psi(t) = 0$

$$\psi(t) = A(h)\cdot\cos(ht) + B(h)\cdot\sin(ht)$$

$$\psi'(t) = -h\cdot A(h)\cdot\sin(ht) + h\,B(h)\cdot\cos(ht)$$

$$0 = \psi(0) = A(h) \text{ e } \quad 0 = \psi'(\pi) \underset{A=0}{=} h\cdot B(h)\cdot\cos(h\pi).$$

Cioè, $h\pi = \frac{\pi}{2} + n\pi$ $(n \in \mathbb{N})$, dunque

$$h = \frac{1}{2} + n \quad (n \in \mathbb{N}):$$

$$v_n(x,t) = \left[C(n)\cdot\cos\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)x\right) + D(n)\cdot\sin\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)x\right)\right]\cdot\sin\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)t\right)$$

In generale

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[C(n)\cdot\cos\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)x\right) + D(n)\cdot\sin\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)x\right)\right]\cdot\sin\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)t\right).$$