Prova scritta di Complementi di Analisi Matematica L-S
9 gennaio 2012

Nome..**Cognome**... **Matricola**.................

Scrivete solo le soluzioni e, se volete, i passaggi principali. Scrivete sul e consegnate solo il foglio degli esercizi.

(1) [6 pti] Sia $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\pi}{2} - \left|x - \frac{\pi}{2}\right|$. Trovare $\{c_n : n \in \mathbb{N},\ n \geq 1\}$ in $\mathbb{C}$ tali per cui

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx) \text{ in } L^2([0,\pi]).$$

(2) [6 pti] Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \partial_{xx}u(x,t) + \partial_t u(x,t) - \partial_{tt}u(x,t) = 0 \text{ per } (x,t) \in [0,\pi] \times [0,\pi]; \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \text{ per } t \in [0,\pi]; \\ u(x,0) = \frac{\pi}{2} - \left|x - \frac{\pi}{2}\right| \text{ per } x \in [0,\pi]; \\ \partial_t u(x,0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \left|x - \frac{\pi}{2}\right|\right) \text{ per } x \in [0,\pi]. \end{cases}$$

CAMLS

ES. 4 Sia $x = x(t)$ con $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$

Se $\varphi(t) = v(x(t), t)$, allora $\dot\varphi(t) = v_x \dot x + v_t$:

voglio ① $\begin{cases} \dot x(t) = x(t)t \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ (eq. curve caratteristiche).

Il problema ① è a variabili separabili:

$\frac{dx}{x} \doteq t\,dt$ $\qquad \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{x} \doteq \int_0^t s\,ds = \frac{t^2}{2}$

$\Vert \quad \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{x} = \Big[\log|x|\Big]_{x_0}^{x(t)} = \log\frac{|x(t)|}{|x_0|}$

cioè, $|x(t)| = |x_0| \cdot e^{t^2/2}$

1^* $\boxed{x(t) = x_0 \cdot e^{t^2/2}}$

Poiché $\dot\varphi(t) = v_x \dot x + v_t = v_x \cdot xt + v_t$, abbiamo

$$\begin{cases} \dot\varphi = xtv^2 = x_0 \cdot e^{t^2/2} \cdot t \cdot \varphi^2 \\ \varphi(0) = v(x(0), 0) = v(x_0, 0) = \sin(x_0) \end{cases}$$

cioè, φ risolve ② $\begin{cases} \dot\varphi = x_0 \cdot e^{t^2/2} \cdot t \cdot \varphi^2 \\ \varphi(0) = \sin(x_0) \end{cases}$

$\frac{d\varphi}{\varphi^2} \doteq x_0\, e^{t^2/2} \cdot t\, dt$ $\qquad \int_{\varphi(0)=\sin(x_0)}^{\varphi(t)} \frac{d\varphi}{\varphi^2} \doteq x_0 \int_0^t e^{s^2/2} \cdot s\, ds = x_0\left(e^{t^2/2} - 1\right)$

$\left[-\frac{1}{\varphi}\right]_{\sin(x_0)}^{\varphi(t)} = \frac{1}{\sin(x_0)} - \frac{1}{\varphi(t)}$

$\Rightarrow$ 2^* $\boxed{\varphi(t) = \left[\frac{1}{\sin(x_0)} - x_0\left(e^{t^2/2} - 1\right)\right]^{-1}}$

2

Abbiamo infine $v(x(t),t) = \varphi(t) =$

$$= \left[\frac{1}{\sin(x_0)} - x_0 \cdot \left(e^{t^2/2} - 1\right)\right]^{-1},$$

ma $x(t)$ e x_0 sono legati da $x(t) = x_0\, e^{t^2/2}$

$$\Leftrightarrow \quad x_0 = e^{-t^2/2} \cdot x(t)$$

Da cui:

$$v(x,t) = \left[\frac{1}{\sin\left(e^{-t^2/2} x\right)} - e^{-t^2/2} \cdot x \cdot \left(e^{t^2/2} - 1\right)\right]^{-1}$$