

Prova scritta di Complementi di Analisi Matematica L-S
13 febbraio 2012

Nome.....Cognome..... Matricola.....

Scrivete solo le soluzioni e, se volete, i passaggi principali. Scrivete sul e consegnate solo il foglio degli esercizi.

(1) [6 pti] Sia $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \pi/3 \leq x \leq 2\pi/3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Trovare $\{k_n : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$ in \mathbb{C} tali per cui

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \sin(nx) \text{ in } L^2([0, \pi]).$$

Prove sostanzialmente simili a quello del 23/1/2012.

(2) [6 pti] Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \partial_{xx}u(x,t) + \partial_t u(x,t) - \partial_{tt}u(x,t) = 0 & \text{per } (x,t) \in [0, \pi] \times [0, \pi]; \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \text{per } t \in [0, \pi]; \\ u(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{se } \pi/3 \leq x \leq 2\pi/3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} ; \\ \partial_t u(x,0) = \begin{cases} 1/2 & \text{se } \pi/3 \leq x \leq 2\pi/3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \end{cases}$$

(3) [6 pts] Sia $u : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la soluzione di

$$\begin{cases} \partial_{tt}u(x, t) = \partial_{xx}u(x, t) \text{ in } \mathbb{R} \times [0, \infty), \\ u(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{se } -1 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \\ u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = u(x, 1/2)$. Calcolare $\hat{f}(\zeta) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\zeta x} dx$.

(4) [6 pts] Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} (1+x^2)u_x + u_t = u + 1, \\ u(x, 0) = \sin(x). \end{cases}$$

(5) [6 pts] Trovare tutte le funzioni u tali che

$$\begin{cases} \partial_{xx}u(x, t) + \partial_t u(x, t) - \partial_{tt}u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{se } \pi/3 \leq x \leq 2\pi/3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} & \text{per } (x, t) \in [0, \pi] \times [0, \pi]; \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & \text{per } t \in [0, \pi]. \end{cases}$$