① Sia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile e sia

$$g(x) = (x^2+1)^{h(x)} \quad ; \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Calcolare $g'(x)$ e, sapendo che $h(0)=1$ e $h(1)=2$, $h'(1)=\pi$, $h'(0)=e$, calcolare $g'(1)$.

② Calcolare $\lim_{n\to\infty} \left[\left(1-\frac{2}{n}\right)^n + 3\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2} + 5\cdot\left(1+\frac{2n}{n^2+1}\right)^{\frac{n^3}{n^2+2}} \right]$

③ Calcolare $\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(\cos(x))\, e^x}{(e^x-1)^2}$

④ Sia $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ continua con $f(-1)=1$; $f(0)=-1$.
Quali delle seguenti affermazioni segue necessariamente dalle ipotesi?

Ⓐ $\forall x \in [-1,1]$ esiste $\sqrt{1-f(x)^2} \in \mathbb{R}$

Ⓑ $\exists x \in [-1,1]$ tale che $f(x) = 4x^2$

Ⓒ $\exists x \in [-1,1]$ tale che $f(x) = \frac{x^2}{4}$

Ⓓ f è decrescente in $[-1,1]$.

Soluzioni (svolgimento).

(1) $g(x) = \left(e^{\log(x^2+1)}\right)^{h(x)} = e^{h(x)\cdot\log(x^2+1)}$

$\Rightarrow g'(x) = e^{h(x)\log(x^2+1)} \cdot \left[h'(x)\log(x^2+1) + h(x)\frac{2x}{x^2+1}\right]$

$\Rightarrow g'(1) = 2^{h(1)} \cdot \left[h'(1)\cdot\log(2) + h(1)\frac{2}{2}\right]$

$= 2^2 \cdot \left[\pi\log(2) + 2\right]$

(2) $e^{-2} + 5\cdot e^2$

(3) $-1/2$

(4) (c)