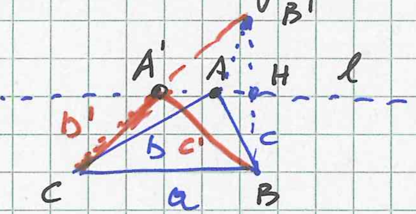
PROBLEMA: tra tutti i triangoli T aventi area $A(T) = 1$, ce n'è uno avente perimetro $p(T)$ minimo? Se c'è, qual'è?

(1) Riduzione al caso di triangoli isosceli.

Lemma 1. Se T è un triangolo con $A(T) = 1$ e non è equilatero, allora esiste un triangolo T' con $A(T') = 1$ e $p(T') < p(T)$.



Dim. Sia T il triangolo di lati a, b, c con $b \neq c$. Sia l la retta parallela ad a per il vertice A di T (quello opposto ad a) e sia B' il simmetrico di B rispetto a l.

Sia $A' = \overline{B'C} \cap l$:

(i) $\overset{\triangle}{CA'B} = T'$ è isoscele con base CB: infatti $CA' = A'B'$ perché $\overset{\triangle}{A'HB'}$ e $\overset{\triangle}{CBB'}$ sono simili e $B'H = HB$; e $A'B' = A'B$ per la simmetria.

(ii) $A(T') = A(T)$: stessa base a, stessa altezza.

(iii) $p(T') < p(T)$: $CA' + A'B = CA' + A'B' = CB'$
$< CA + AB' = CA + AB$. ■

(2) Osservazione. Se sapessimo che un triangolo di perimetro minimo esiste, per il Lemma 1 non potrebbe che essere equilatero.

(Utilizzando il Teorema di Weierstrass in più dimensioni, programma di An. Mat. II, si può dimostrare l'esistenza del minimo, infatti).

Cerchiamo una via alternativa.

(3) Idea. Parto da un triangolo T_0 qualsiasi con (i) $A(T_0) = 1$; (ii) T_0 isoscele (per Lemma 1, posso farlo).

Sia T_1 il triangolo ottenuto da T_0 usando Lemma 1; T_2 quello ottenuto da T_1; eccetera.

Allora: $A(T_n) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (a)

$0 \leq p(T_n) \leq p(T_{n-1}) \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$ (b)

Per (b), la successione $\{p(T_n)\}_{n=0}^{\infty}$ è decrescente, quindi

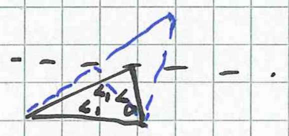
$$\exists \lim_{n \to \infty} p(T_n) = \bar{p} \geq 0.$$

Se mostro che $\bar{p}$ è il perimetro del triangolo equilatero di area 1 sono a posto:

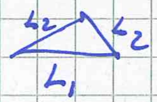
$$\bar{p} = \lim_{n \to \infty} p(T_n) = \inf\{p(T_n) : n \geq 0\} \leq p(T_0):$$

il triangolo T_0 ha perimetro $\geq$ di quello del triangolo equilatero ($>$ se T_0 non è equilatero).

(4) Sia T_0 il triangolo avente $\begin{cases} \text{base } L_0 \\ \text{due lati pari a } L_1 \end{cases}$



T_0



la costruzione del lemma 1 lo trasforma in

T_1 con $\begin{cases} \text{base } L_1 \\ \text{due lati lunghi } L_2 \end{cases}$

quindi T_2 con $\begin{cases} \text{base } L_2 \\ \text{due lati lunghi } L_3 \end{cases}$

e così via:

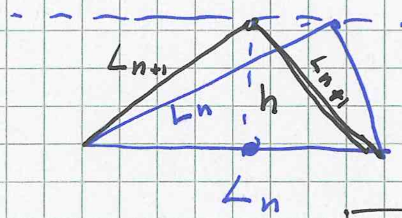
T_n ha $\begin{cases} \text{base } L_n \\ \text{due lati lunghi } L_{n+1} \end{cases}$ $(n \geq 0)$.

Cerchiamo una formula che ci permetta di calcolare L_{n+1} se conosciamo L_{n-1} e L_n.

Lo scopo è mostrare che
$\exists \lim_{n\to\infty} L_n = \bar{L}$.

Se ciò accade, anche $\exists \lim_{n\to\infty} L_{n+1} = \bar{L}$,

cioè T_n "tende a essere equilatero".
Poi vedremo come utilizzare questa intuizione.



(a) Pitagora $\Rightarrow L_{n+1}^2 = h^2 + \left(\frac{L_n}{2}\right)^2$

(b) Calcolo di Area$(T_n) \Rightarrow$

$$h \cdot L_n = \sqrt{L_n^2 - \left(\frac{L_{n-1}}{2}\right)^2} \cdot L_{n-1}$$

(c) Inoltre $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{L_n^2 - \left(\frac{L_{n-1}}{2}\right)^2} \cdot L_{n-1} = 1$.

Da (a) e (b): $L_{n+1}^2 = h^2 + \frac{L_n^2}{4} = \left(\frac{L_{n-1}}{L_n}\right)^2 \cdot \left(L_n^2 - \frac{L_{n-1}^2}{4}\right) + \frac{L_n^2}{4}$

$$= L_{n-1}^2 - \frac{L_{n-1}^4}{4 L_n^2} + \frac{L_n^2}{4} = L_n^2 \cdot \left\{ \left(\frac{L_{n-1}}{L_n}\right)^2 - \left(\frac{L_{n-1}}{L_n}\right)^4 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right\}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{L_{n+1}}{L_n}\right)^2 = \left(\frac{L_{n-1}}{L_n}\right)^2 - \left(\frac{L_{n-1}}{L_n}\right)^4 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

Poniamo $\left(\frac{L_{n-1}}{L_n}\right)^2 = P_n \in (0, 4)$ per la proprietà triangolare:

$L_{n-1} \leq 2 \cdot L_n$.

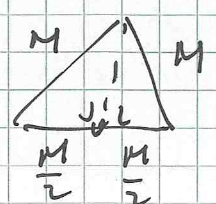
(5) Dimostrazione che il problema ha soluzione se mostriamo che $\exists \lim_{n\to\infty} L_n = \bar{L} \in \mathbb{R}$.

In tal caso, infatti, da (c) ricaviamo che

$$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \sqrt{L_n^2 - \frac{L_{n-1}^2}{4}} \cdot L_{n-1} = \frac{1}{2}\sqrt{\bar{L}^2 - \frac{\bar{L}^2}{4}} \cdot \bar{L}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \bar{L}^2, \text{ cioè } \bar{L}^2 = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

D'altra parte in un triangolo equilatero di area $= 1$ il lato M soddisfa $1 = \frac{M}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} M = \frac{\sqrt{3}}{4} M^2$.



Quindi $\bar{L}^2 = \bar{M}^2 = 4/\sqrt{3}$.

Abbiamo anche $\bar{p} = \lim_n p(T_n)$

$= \lim_n (2L_{n+1} + L_n) = 3 \cdot \bar{L} = 4 \cdot \sqrt{3}$

è il perimetro di un triangolo equilatero di Area 1; quindi siamo a posto per quanto detto in (3).

(6) L'esistenza del limite non è banale!

L'ultima equazione in (4-c) può essere scritta:

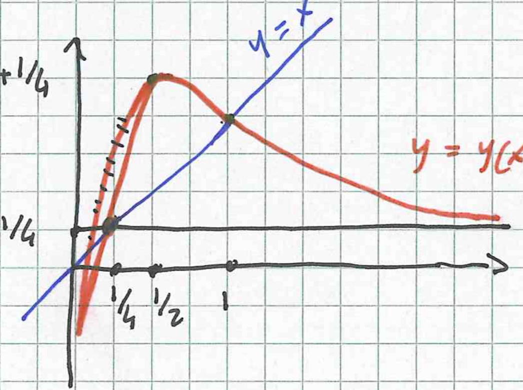
$$P_{n+1} = \frac{1}{P_n} - \frac{1}{4P_n^2} + \frac{1}{4}$$

Considero il grafico di $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{4}$; $x > 0$

$$y' = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x^3} = \frac{-2x+1}{2x^3} \geq 0 \iff 0 < x \leq 1/2$$

Ho anche: $\lim_{x \to 0^+} y = -\infty$; $\lim_{x \to +\infty} y = 1/4$

e $y(1/2) = 2 - 1 + 1/4 = 1 + 1/4$.



Risolvo $y = x$, cioè

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{4} = x$$

$$4x^3 - x^2 - 4x + 1 = 0$$

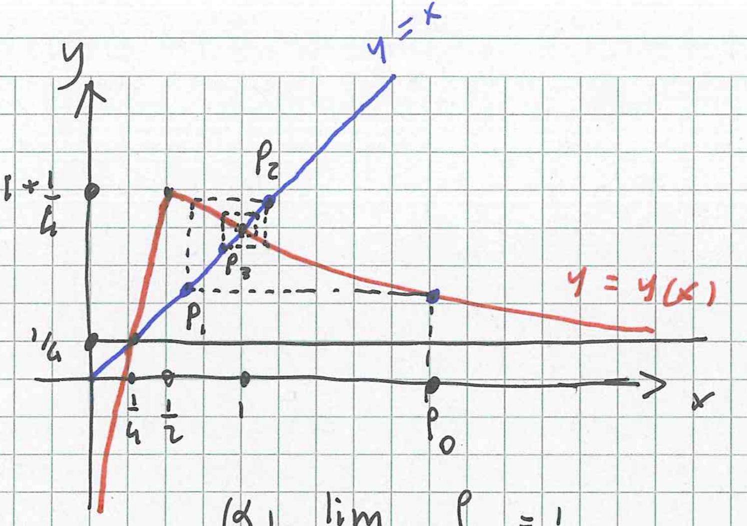
$$(4x-1)(x^2-1): \quad x = 1, \; x = 1/4$$

Ho disegnato anche $y = x$ perché la ~~[illegible]~~ successione $\begin{cases} P_{n+1} = y(P_n) \\ P_0 > 1/4 \end{cases}$

può essere interpretata graficamente:

I punti indicati con $\rho_1, \rho_2, \ldots$ hanno coordinate (ρ_1, ρ_1), (ρ_2, ρ_2), ...

Se la rappresentazione grafica è fedele, abbiamo che



$$(\alpha) \quad \lim_{n\to\infty} \rho_n = 1$$

~~(β) Se $\rho_0 > 1$, allora:~~

$$\cancel{\rho_0 > \rho_2 > \rho_4 > \cdots > 1 > \cdots > \rho_5 > \rho_3 > \rho_1}$$

~~(β') cosa succede se $1/4 < \rho_0 < 1$?~~

~~Diamo per buone queste proprietà:~~

$$\cancel{\rho_1^{1/2} = \frac{L_0}{L_1} < \rho_3^{1/2} = \frac{L_2}{L_3} < \cdots < 1 < \cdots < \rho_4^{1/2} = \frac{L_3}{L_4} < \rho_2 = \frac{L_1}{L_2}}$$

~~da cui deduco: $L_0 < L_1$ $\quad L_4 < L_3$~~

~~$L_2 < L_3$ $\quad L_2 < L_1$~~

~~quindi~~ Utilizzo ancora la relazione di area all'inizio di (4-c):

$$\frac{1}{L_{n-1}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{L_n}{L_{n-1}}\right)^2 - \frac{1}{4}} \Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\rho_n} - \frac{1}{4}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Cioè, $\exists \lim_{n\to\infty} L_n^2 = \frac{4}{\sqrt{3}}$ come si voleva.

(7) Ci siamo finalmente ridotti a mostrare che $\exists \lim_n \rho_n = 1$.