$$f(x) = (|x+3| + x+3)\, e^{|x^2-7|}$$

OSS. $f(x) \neq -f(-x)$

$f(x) \neq f(-x)$

$\boxed{\text{DOMINIO}}$ f $\quad dom(f) = \mathbb{R}$

$\boxed{\text{CONTINUITÀ}}$ la f è CONTINUA in tutto $\mathbb{R}$ in quanto SOMMA, PRODOTTO O COMPOSIZIONE di funzioni continue.

$$f'(x) = (sgn(x+3)\cdot 1 + 1)\cdot e^{|x^2-7|} + (|x+3| + x+3)\cdot e^{|x^2-7|}\cdot sgn(x^2-7)\cdot 2x =$$

$$= e^{|x^2-7|}\left[sgn(x+3) + 1 + 2x\,(|x+3| + x+3)\cdot sgn(x^2-7)\right]$$

$\boxed{\text{DOMINIO}}$ f'

$x+3 \neq 0 \qquad x \neq -3$

$x^2-7 \neq 0 \qquad x \neq \pm\sqrt{7} \qquad \Rightarrow \quad dom(f') = \mathbb{R} \setminus \{-3, +\sqrt{7}, -\sqrt{7}\}$

$\boxed{\text{LIMITI}}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (|x+3| + x+3)\, e^{|x^2-7|} = \lim_{x\to+\infty} (x+3+x+3)\cdot e^{(x^2-7)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (|x+3| + x+3)\, e^{|x^2-7|} = \lim_{x\to-\infty} \overbrace{(-\cancel{x}-\cancel{3}+\cancel{x}+\cancel{3})}^{=0}\cdot e^{(x^2-7)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} 0\cdot e^{x^2-7} = 0$$

$\boxed{\text{MONOTONIA}}$

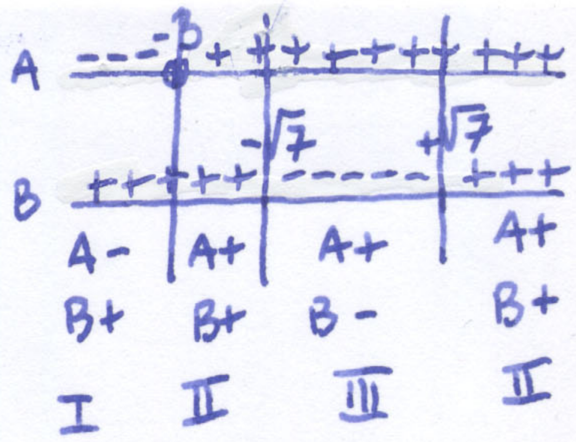
$$f'(x) > 0 \iff e^{|x^2-7|}\cdot\left[sgn(x+3) + 1 + 2x\,(|x+3| + x+3)\cdot sgn(x^2-7)\right] > 0 \quad \star$$

$e^{|x^2-7|} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

STUDIAMO IL SECONDO FATTORE

A) $\operatorname{sgn}(x+3) > 0 \iff x+3>0 \quad x>3$

B) $\operatorname{sgn}(x^2-7) > 0 \iff x^2-7>0 \quad x<-\sqrt{7} \vee x>\sqrt{7}$



2A

CASO I $\quad$ (A- B+) $\quad x+3<0 \quad x^2-7>0 \quad x\in\,]-\infty,-3[$

$$f(x) = (\cancel{-x}\cancel{-3}+\cancel{x}+\cancel{3})\,e^{x^2-7} = 0\cdot e^{x^2-7} = 0 \quad !!!$$

Quindi ogniqualvolta $(x+3)$ è negativo (solo caso I) la funzione è identicamente nulla.
Non ha senso quindi nel caso specifico andare a studiare la f' in questo caso (la funzione è costante e quindi la derivata è nulla).

CASO II $\quad$ (A+ B+) $\quad x+3>0 \quad x^2-7>0 \quad x\in\,]-3,-\sqrt{7}[\,\cup\,]\sqrt{7},+\infty[$

$$f(x) = (x+3+x+3)\,e^{x^2-7} = (2x+6)\,e^{x^2-7}$$

$$f'(x) \overset{*}{=} e^{x^2-7}\cdot\left[1+1+2x(2x+6)\cdot 1\right] = e^{x^2-7}\cdot\left[2+4x^2+12x\right]$$

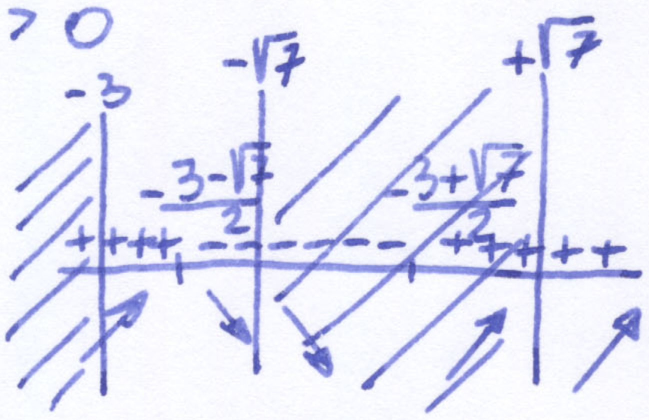
$$f'(x)>0 \iff 4x^2+12x+2>0$$

$4x^2+12x+2>0$

$2x^2+6x+1>0$

$\Delta = 36-8 = 28$

$$x_{1,2} = \frac{-6\pm\sqrt{28}}{4} = \frac{-6\pm 2\sqrt{7}}{4} = \frac{-3\pm\sqrt{7}}{2}$$



Con che pendenza "parte" da -3?

$$\lim_{x\to-3^+} f'(x) = \lim_{x\to-3^+} e^{x^2-7}(4x^2+12x+2) = e^2(36-36+2) = 2e^2 \overset{\text{OSSERVAZIONE}}{>} 0$$

Con che pendenza "arriva" in $-\sqrt{7}$?

$$\lim_{x\to-\sqrt{7}^-} f'(x) = \lim_{x\to-\sqrt{7}^-} e^{x^2-7}(4x^2+12x+2) = e^0(28-12\sqrt{7}+2) = 30-12\sqrt{7} \overset{\text{OSSERVAZIONE}}{<} 0$$

Con che pendenza "parte" da $\sqrt{7}$?

$$\lim_{x\to\sqrt{7}^+} f'(x) = \lim_{x\to\sqrt{7}^+} e^{x^2-7}(4x^2+12x+2) = e^0(28+12\sqrt{7}+2) = 30+12\sqrt{7} \overset{\text{OSS.}}{>} 0$$

CASO III $(A+\ B-)$ $x+3>0$ $x^2-7<0$ $x\in\,]-\sqrt{7},\sqrt{7}[$

$f(x)=(x+3+x+3)\cdot e^{-x^2+7}=(2x+6)\cdot e^{-x^2+7}$

$f'(x)\overset{*}{=}e^{-x^2+7}\left[1+1+2x(2x+6)\cdot(-1)\right]=e^{-x^2+7}(2-4x^2-12x)$

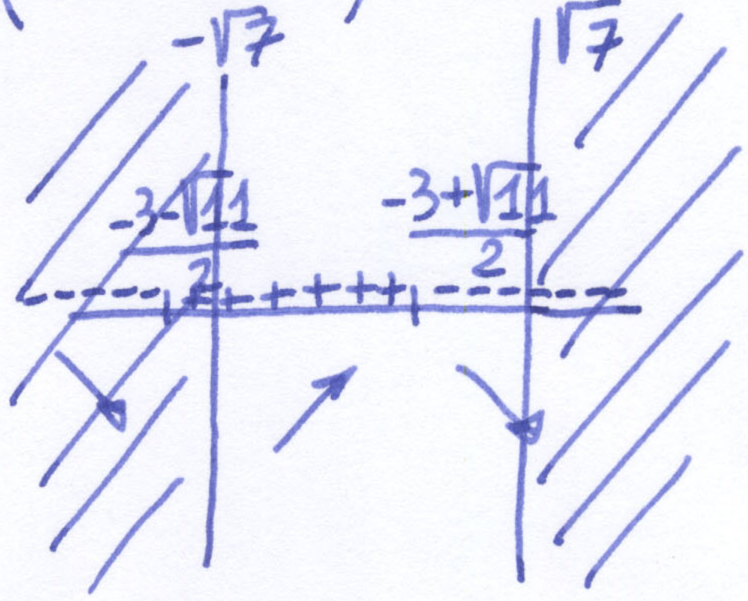
$f'(x)>0 \iff -4x^2-12x+2>0$

$-4x^2-12x+2>0$

$-2x^2-6x+1>0$

$\Delta=36+8=44$

$x_{1,2}=\dfrac{6\pm\sqrt{44}}{-4}=\dfrac{3\pm\sqrt{11}}{-2}=\dfrac{-3\mp\sqrt{11}}{2}$



Con che pendenza "parte" da $-\sqrt{7}$?

$\lim_{x\to-\sqrt{7}^+} f'(x)=\lim_{x\to-\sqrt{7}^+} e^{-x^2+7}(-4x^2-12x+2)=e^0(-28+12\sqrt{7}+2)=-26+12\sqrt{7}\overset{\text{oss.}}{>}0$

Con che pendenza "arriva" in $\sqrt{7}$?

$\lim_{x\to\sqrt{7}^-} f'(x)=\lim_{x\to\sqrt{7}^-} e^{-x^2+7}(-4x^2-12x+2)=e^0(-28-12\sqrt{7}+2)=-26-12\sqrt{7}\overset{\text{oss.}}{<}0$

É interessante sapere per una giusta rappresentazione del grafico i massimi, i minimi ed i valori della funzione nei punti di discontinuità della derivata.

$f(-3)=0$

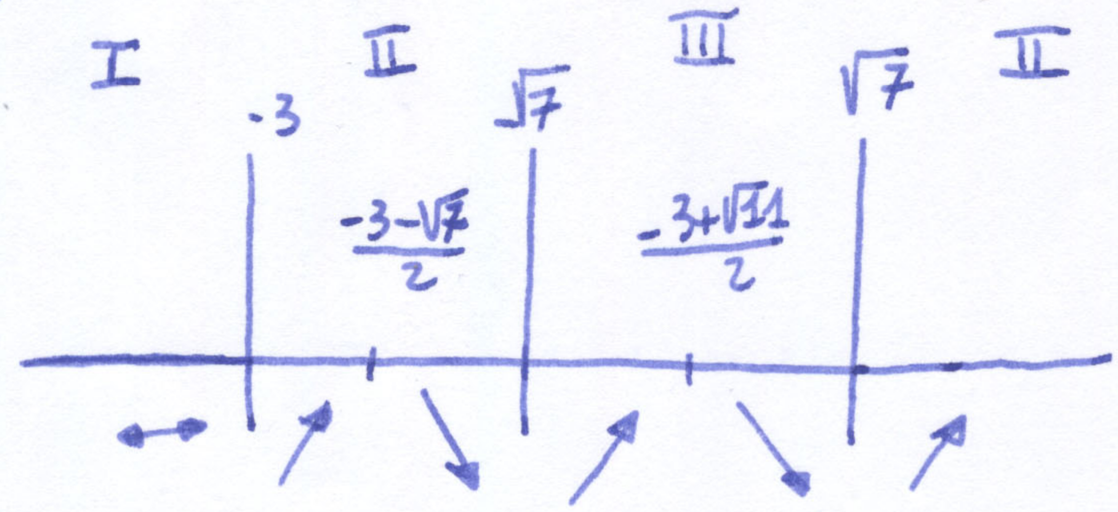
$\overset{\text{MAX REGOLARE}}{f\left(\frac{-3-\sqrt{7}}{2}\right)}=(-3-\sqrt{7}+6)\cdot e^{\left(\frac{-3-\sqrt{7}}{2}\right)^2-7}=(3-\sqrt{7})\cdot e^{\frac{9+7+6\sqrt{7}-28}{4}}=(3-\sqrt{7})e^{\frac{-6+3\sqrt{7}}{2}}$

$\overset{\text{MIN}}{f(-\sqrt{7})}=-2\sqrt{7}+6$

$\overset{\text{MAX REGOLARE}}{f\left(\frac{-3+\sqrt{11}}{2}\right)}=(-3+\sqrt{11}+6)\cdot e^{-\left(\frac{-3+\sqrt{11}}{2}\right)^2+7}=(3+\sqrt{11})\cdot e^{\frac{-9-11+6\sqrt{11}+28}{4}}=(3+\sqrt{11})\cdot e^{\frac{4+3\sqrt{11}}{2}}$

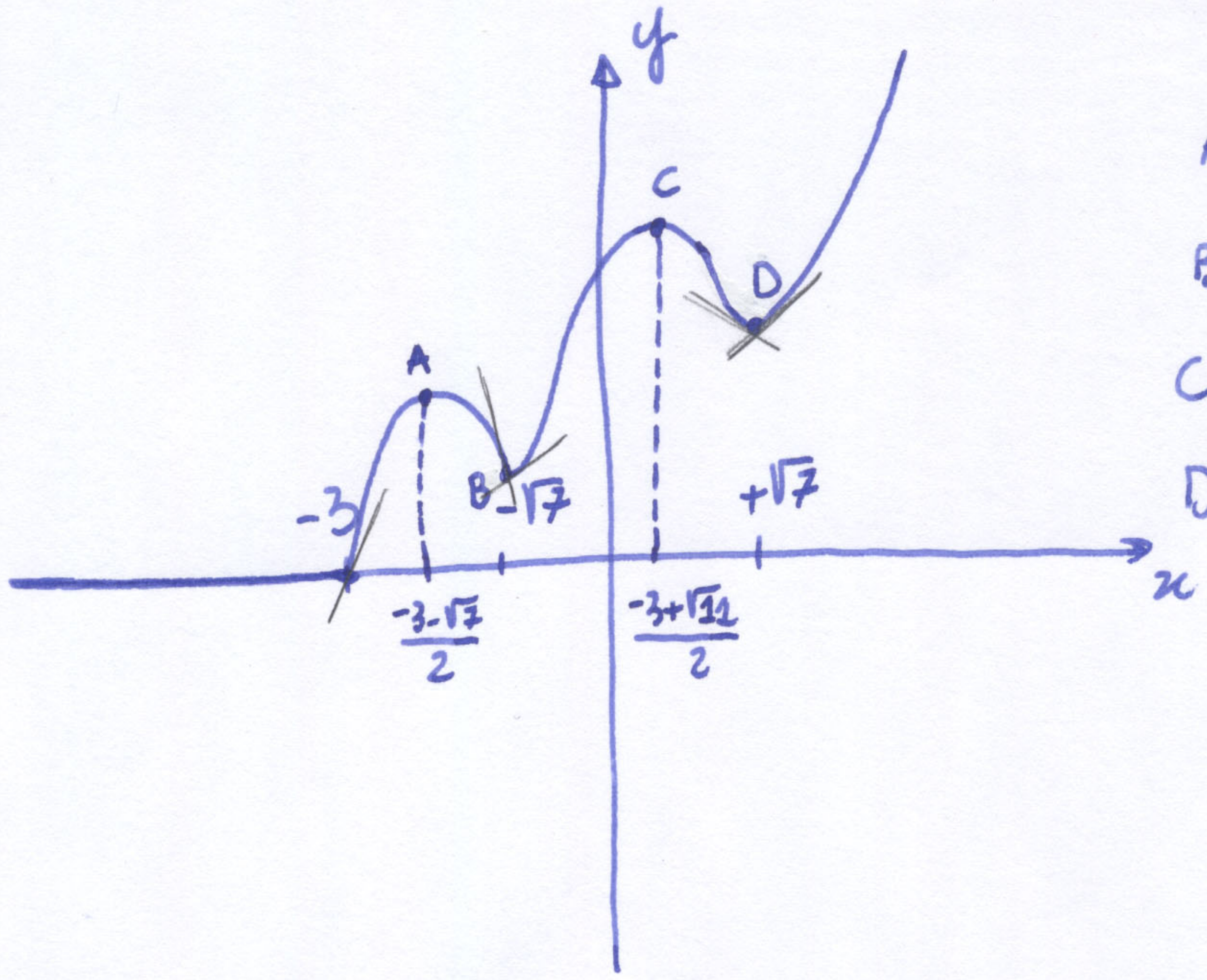
$\overset{\text{MIN}}{f(\sqrt{7})}=2\sqrt{7}+6$

COMPENDIO



OSS. I MINIMI non sono regolari in quanto $\lim_{x\to x_0^+} f'(x)\neq\lim_{x\to x_0^-} f'(x)$

GRAFICO



$A = \left(\frac{-3-\sqrt{7}}{2} ; (3-\sqrt{7})\, e^{\frac{-6+3\sqrt{7}}{2}}\right)$

$B = \left(-\sqrt{7} ; -2\sqrt{7}+6\right)$

$C = \left(\frac{-3+\sqrt{11}}{2} ; (3+\sqrt{11})\cdot e^{\frac{4+3\sqrt{11}}{2}}\right)$

$D = \left(\sqrt{7} ; 2\sqrt{7}+6\right)$

OSSERVAZIONI

∞ MASSIMI RELATIVI, PUNTI DI MASSIMO $\overset{A}{\frac{-3-\sqrt{7}}{2}}$; $\overset{C}{\frac{-3+\sqrt{11}}{2}}$ ED OGNI PUNTO $x < 3$

∞ MINIMI RELATIVI, PUNTI DI MINIMO $\overset{B}{-\sqrt{7}}$ $\overset{D}{\sqrt{7}}$ ED OGNI PUNTO $x \leq -3$

2 MASSIMI RELATIVI STRETTI, A e C

2 MINIMI " ", B e D

$\sup(f) = +\infty$

$\inf(f) = 0$

$\mathcal{I}m(f) = [0, +\infty[$

(ASSOLUTI!) $\max(f)$ NON ESISTE

$\min(f) = 0$

Esempi

$f([-\sqrt{7}, \sqrt{7}[) = \left[-2\sqrt{7}+6, (3+\sqrt{11})\cdot e^{\frac{4+3\sqrt{11}}{6}}\right]$

$f(]-\infty, 0]) = [0, 6e^{7}]$

L'immagine della funzione o di singoli intervalli è possibile determinarla esclusivamente dopo un'opportuna rappresentazione del grafico della funzione.