NOTA: NON É QUELLA SVOLTA A LEZIONE 

$$f(x) = 1 - e^{\frac{\sin^2(x)}{\cos(x) - 1/2}}$$

OSS. $f(x) = +f(-x)$ PARI

SULLA PERIODICITÁ

Nella funzione la variabile compare solo come argomento di funzioni periodiche, quindi é ragionevole chiedersi se la risultante lo sia. Non é il caso di dare teoremi a riguardo, ma affidandoci "all'intuizione" la funzione globale avrá un periodo é il "MINIMO COMUNE MULTIPLO" di tutti i periodi di ogni funzione periodica che compare.
Nel nostro caso é ancora piú semplice in virtú del fatto che le uniche due che compaiono ($\sin x$ e $\cos x$) hanno entrambe periodo $2\pi$. Quindi é facile verificare che

$$\forall t \in dom(f) \qquad f(t+2\pi) = f(t)$$

e cioé che anche la nostra funzione ha periodo $2\pi$.
Pur preoccupandoci di tutto $\mathbb{R}$ avremo quindi bene in mente che ogni informazione ricavata come pure il grafico dovrá avere periodo $2\pi$.

$\boxed{\text{DOMINIO}}$ $\quad \cos x - \frac{1}{2} \neq 0 \qquad \cos x \neq \frac{1}{2}$

$x \neq \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

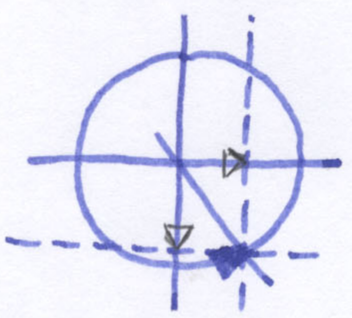
$\boxed{\text{CONTINUITÁ}}$

La funzione $f$ é CONTINUA su $dom(f)$, in quanto SOMMA, PRODOTTO, COMPOSIZIONE o DIVISIONE di funzioni continue (il caso denominatore $= 0$ é stato escluso dal dominio).

$\boxed{\text{LIMITI}}$

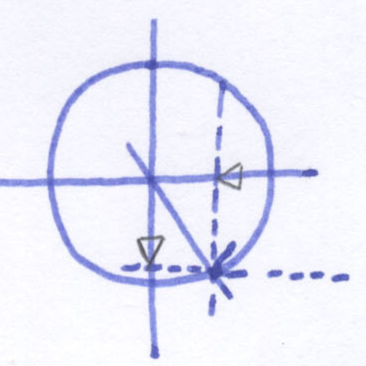
Causa periodicitá non hanno alcun senso i limiti per $\pm\infty$. Ci interessa calcolarli solo per i valori di frontiera del dominio finiti. Causa periodicitá ce ne interessano solo quattro.

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{3}^-} f(x) = \lim_{x \to -\frac{\pi}{3}^-} \left(1 - e^{\frac{\overset{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin^2(x)}}{\underbrace{\cos(x) - \frac{1}{2}}_{0^-}}}\right) =$$



$$= \lim_{x \to -\frac{\pi}{3}^-} \left(1 - e^{\overbrace{\frac{\frac{3}{4}}{\cos(x) - \frac{1}{2}}}^{-\infty}}\right) = 1$$

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{3}^+} f(x) = \lim_{x \to -\frac{\pi}{3}^+} \left(1 - e^{\frac{\overbrace{\sin^2(x)}^{\frac{3}{4}}}{\underbrace{\cos(x) - \frac{1}{2}}_{0^+}}}\right) = -\infty$$



Analogamente

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}^-}\left(1-e^{\frac{\overset{\to \frac{3}{4}}{\sin^2(x)}}{\underset{\to 0^+}{\cos(x)-\frac{1}{2}}}}\right)=-\infty \qquad e \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{3}^+}\left(1-e^{\frac{\sin^2(x)}{\cos(x)-\frac{1}{2}}}\right)=1 \ ◎$$

$$\boxed{\text{DERIVATA E MONOTONIA}}$$

$$f'(x)=-e^{\frac{\sin^2(x)}{\cos(x)-\frac{1}{2}}}\cdot\frac{2\sin(x)\cdot\cos(x)\cdot\left(\cos(x)-\frac{1}{2}\right)-\sin^2(x)\left(-\sin(x)\right)}{\left(\cos(x)-\frac{1}{2}\right)^2}=$$

$$=-e^{\frac{\sin^2(x)}{\cos(x)-\frac{1}{2}}}\cdot\frac{\sin(x)\left[2\cos^2(x)-\cos(x)+\overbrace{\sin^2(x)}^{=1-\cos^2x}\right]}{\left(\cos(x)-\frac{1}{2}\right)^2}=$$

$$=-e^{\frac{\sin^2(x)}{\cos(x)-\frac{1}{2}}}\cdot\frac{\sin(x)\left[\cos^2(x)-\cos(x)+1\right]}{\left(\cos(x)-\frac{1}{2}\right)^2}$$

Come si può osservare $dom(f')=dom(f)$

Studiamo la monotonia

$$f'(x)>0 \iff -\overbrace{e^{\frac{\sin^2(x)}{\cos(x)-\frac{1}{2}}}}^{>0}\cdot\frac{\sin(x)\left[\cos^2(x)-\cos(x)+1\right]}{\underbrace{\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)^2}_{>0 \text{ (dove esiste)}}}>0$$

Quindi studiamo

$$-\sin(x)\left[\cos^2(x)-\cos(x)+1\right]>0$$

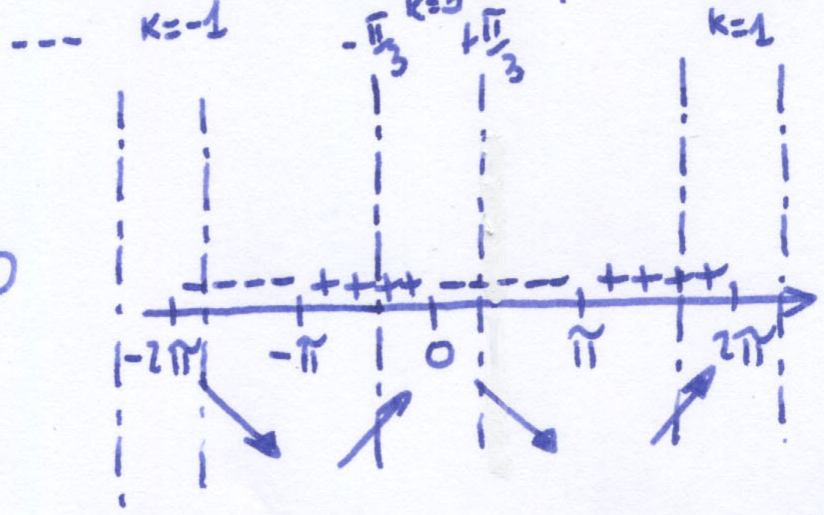
$$\cos^2(x)-\cos(x)+1>0$$

$\cos(x)=t \quad t^2-t+1>0$ S.V. $\forall t\in\mathbb{R}$ e quindi $\forall x\in dom(f')$ $(=dom(f))$

$$\Delta=1-4=-3$$

Per cui rimane

$$-\sin(x)>0$$




MASSIMI IN $x=0+2k\pi$

MINIMI IN $x=\pi+2k\pi$

TUTTI REGOLARI

In più visti i due limiti finiti ◎ ci interessa la "pendenza" della curva in prossimità di tali due valori. Vediamo dunque

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{3}^-}f'(x)=\lim_{x\to-\frac{\pi}{3}^-}-e^{\frac{\sin^2(x)}{\cos(x)-\frac{1}{2}}}\cdot\frac{\sin(x)\left[\cos^2(x)-\cos(x)+1\right]}{\left(\cos(x)-\frac{1}{2}\right)^2}=$$

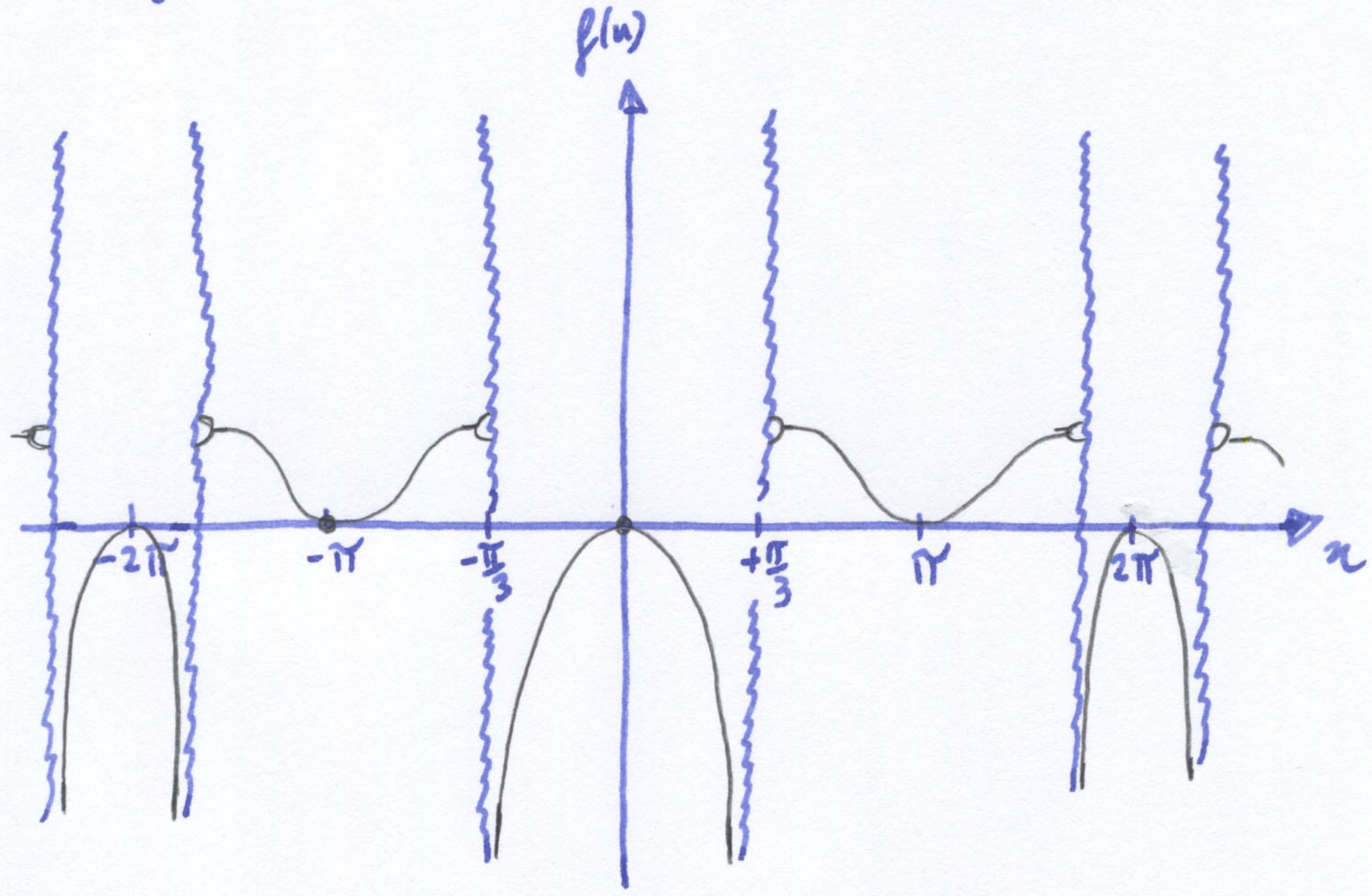
$$=\lim_{x\to-\frac{\pi}{3}^-}-e^{\frac{\frac{3}{4}}{\cos(x)-\frac{1}{2}}}\cdot\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1\right]}{\left(\cos(x)-\frac{1}{2}\right)^2}\underset{y=\cos(x)-\frac{1}{2}}{=}\lim_{y\to0^-}-e^{\frac{3}{4y}}\cdot\frac{-\frac{3\sqrt{3}}{8}}{y^2}=$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{8} \cdot \lim_{y \to 0^-} \underbrace{\left(e^{3/4}\right)^{\frac{1}{y}}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{y^2}}_{\to +\infty} = 0$$ "derivata quindi orizzontale"

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}^+} f'(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{3}^+} -e^{\frac{\sin^2(x)}{\cos(x)-\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\sin(x)\left[\cos^2(x) - \cos(x) + 1\right]}{\left(\cos(x) - \frac{1}{2}\right)^2} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{3}^+} -e^{\frac{\frac{3}{4}}{\cos(x)-\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1\right]}{\left(\cos(x) - \frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{3\sqrt{3}}{8} \lim_{y \to 0^-} \left(e^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{y}} \cdot \frac{1}{y^2} = 0$$ "Idem"

GRAFICO




CALCOLO MASSIMI e MINIMI

$$f(0) = 1 - e^{\frac{0}{1/2}} = 0$$

$$f(-\pi) = 1 - e^{\frac{0}{-3/2}} = 0$$

OSSERVAZIONI

$\operatorname{Im}(f) = ]-\infty, 1[$ $\quad \sup(f) = 1$ $\quad \inf(f) = -\infty$

(ASSOLUTI!)
$\max(f)$ NON ESISTE
$\min(f)$ NON ESISTE

$\infty$ MASSIMI RELATIVI TUTTI UGUALI A ZERO

PUNTI DI MASSIMO RELATIVO $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ TUTTI REGOLARI

$\infty$ MINIMI RELATIVI TUTTI UGUALI A ZERO

PUNTI DI MINIMO RELATIVO $x = \pi + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$ TUTTI REGOLARI

STRETTI O NON STRETTI LA SITUAZIONE È LA MEDESIMA

Esempi

$f\left(\left]-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right[\right) = ]-\infty, 0]$

$f\left(\left]\frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi\right[\right) = [0, 1[$ $\qquad \max\limits_{x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]} (f) = 0$

$f\left(\left[-\pi, -\frac{\pi}{3}\right[\right) = [0, 1[$

$f\left(\left]0, \frac{\pi}{6}\right]\right) = \left[f\left(\frac{\pi}{6}\right), 0\right[$ $\qquad \min\limits_{x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]} (f) = f\left(\frac{\pi}{4}\right)$