Alcuni esercizi per il I parziale

Nicola Arcozzi

October 30, 2009

- Calcolare
$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{2n^2+n+1}+9^{n^2+n+1}}{(3^{2n}+1)^{n+1}+(3^{2n+2}+1)^n}$$

- Sia
$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \frac{x^2-x}{x^2+2x-3}$$
Trovare i punti x_0 per cui $f(x_0)$ non ha significato e, per ciascuno di essi, calcolare $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ e $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ (includere $x_0 = +\infty$ e $X_0 = -\infty$). Utilizzare queste informazioni per tracciare un grafico (molto) approssimativo di f.

- Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile su tutto $\mathbb{R}$ e si definisca $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ come
$$g(x) = \operatorname{arctg}(f(3x+1)).$$
Calcolare $f'(x)$.

- Siano $f, g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ due funzioni. Supponiamo che f sia crescente in $[-1,1]$ e che $g(-1) > f(-1)$ e che $g(1) > f(1)$. Quale delle seguenti affermazioni segue dalle ipotesi?

  (i) g è crescente in $[-1,1]$. (ii) g non è decrescente in $[-1,1]$. (iii) Se $g(0) < f(1)$, allora g non è decrescente in $[-1,1]$. (iv) $\forall x \in [-1,1]$ $g(x) > f(x)$.

Soluzioni (1) 9. (2) I punti da considerare sono $x_0 = \pm\infty, 0, -3, 1$. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{e}{4}$, $\lim_{x\to -3^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to -3^-} f(x) = +\infty$. (3) Si ha:

$$g'(x) = \frac{3f'(3x+1)}{f(3x+1)^2+1}$$

(4) (iii)