ANALISI COMPESSA
E
MAPPE CONFORMI

2010

NICOLA ARCOZZI
arcozzi@dm.unibo.it

I - Funzioni olomorfe in breve.

§1 - $\mathbb{C}$.

$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$: numeri complessi.

$z = x+iy \longmapsto \bar{z} = x-iy$ è un isomorfismo di $\mathbb{C}$: il ruolo svolto da i e da $-i$ è speculare.

$$J(z \mapsto +\bar{z}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \ \det(J(z \mapsto +\bar{z})) = -1$$

il coniugio inverte l'orientazione.

Un modello di $\mathbb{C}$ in $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

$$z = x+iy \xmapsto{\Lambda} \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}$$

è un isomorfismo iniettivo:

$$\Lambda(zw) = \Lambda(z) \cdot \Lambda(w)$$

$$\begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u & -v \\ v & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xu - yv & -(xv+uy) \\ xv+uy & xu-yv \end{bmatrix}.$$

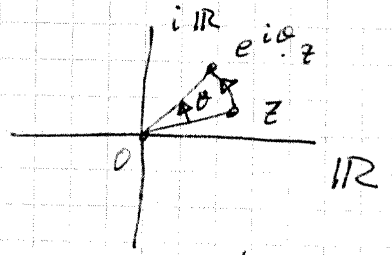
Inoltre: $\Lambda(z)w = zw$

$$\begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xu - yv \\ xv + yu \end{pmatrix}$$

Inoltre: $\det(\Lambda(z)) = |z|^2$.

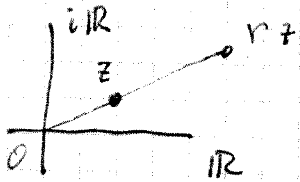
• $z \longmapsto e^{i\theta} \cdot z = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \theta \in \mathbb{R}$

è una rotazione di θ radianti



$z \longmapsto r \cdot z = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad r \geq 0$

è una dilatazione (se $r \neq 0$)



• Poiché $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ è $a = |a| \cdot e^{i\alpha}$,

$z \longmapsto az$ è una roto-dilatazione.

Gruppo delle similitudini di $\mathbb{R}^2$ (dirette):

(*) $z \longmapsto az + b \quad (a, b \in \mathbb{C};\ a \neq 0)$

(*) è un'isometria $\iff |a| = 1$.

Esercizio. Esiste $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

$\forall z \in \mathbb{C} : \ A \cdot \Lambda(z) = \Lambda(\bar{z})$?

§2 - Derivate complesse.

$z_0 \in \Omega \subseteq \mathbb{C}$, Ω aperto,

$f : \Omega \to \mathbb{C}$

$w = u + iv = f(z) = f(x + iy)$

f è derivabile in z_0 se

$\exists\, f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$

Proposizione. f è derivabile in $z_0 \iff$ f è differenziabile in z_0 e

$$\text{(C.R.)} \quad \begin{cases} u_x(z_0) = v_y(z_0) \\ u_y(z_0) = -v_x(z_0) \end{cases}$$

Dim. f è derivabile in $z_0 \iff$

$\exists\, a \in \mathbb{C} : \ f(z_0 + h) = f(z_0) + ah + o(|h|)$, $h \to 0$,

quindi f è differenziabile.

$ah = \Lambda(a)h = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$

se $a = \alpha + i\beta$, $h = \xi + i\eta$

$\| $

$Jf(z_0) \cdot h = \begin{pmatrix} u_x(z_0) & u_y(z_0) \\ v_x(z_0) & v_y(z_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$

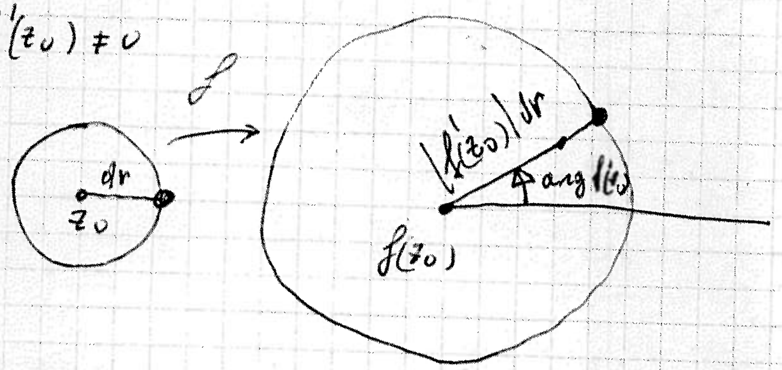
da cui le equazioni di Cauchy-Riemann (C.R.).

Il viceversa usa ancora $f'(z_0)h = Jf(z_0)h$

$f : \Omega \to \mathbb{C}$, Ω aperto in $\mathbb{C}$, è <u>olomorfa</u> in $\Omega \iff \forall z \in \Omega\ \exists f'(z)$.

- Le funzioni olomorfe sono funzioni differenziabili le cui Jacobiana è una rototraslazione (o s'annulla).

$f'(z_0) \neq 0$



- dischi infinitesimi sono mappati in dischi (non ellissi!) infinitesimi.

Scriviamo $f \in Hol(\Omega)$.

- $f \in Hol(\Omega) \Rightarrow f' : \Omega \to \mathbb{C}$, quindi possiamo porci il problema se $f' \in Hol(\Omega)$, ...

Sia $\omega = P\,dx + Q\,dy$ una 1-forma con $P, Q : \Omega \to \mathbb{C}$; $\Omega \subseteq \mathbb{C}$.

$dz = dx + i\,dy$; $d\bar{z} = dx - i\,dy$:

$$\omega = P \cdot \frac{dz + d\bar{z}}{2} + Q \cdot \frac{dz - d\bar{z}}{2i}$$

$$= \frac{1}{2}(P - iQ)\,dz + \frac{1}{2}(P + iQ)\,d\bar{z}.$$

Ciò motiva:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) ; \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

così che

$$df = \partial_x f \cdot dx + \partial_y f \cdot dy =$$

$$= \partial_z f \cdot dz + \partial_{\bar{z}} f \cdot d\bar{z}$$

e (C.R.) diventa

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0} \quad e \quad \boxed{f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)}$$

Nota: $\partial_{\bar{z}}\partial_z v = \partial_z \partial_{\bar{z}} v = \frac{1}{4}\Delta v$,

dove $\Delta v = \partial_{xx} v + \partial_{yy} v$ è il Laplaciano di v.

<u>Corollario</u>. $f \in Hol(\Omega) \cap C^2(\Omega)$

$\Rightarrow \Delta f := \Delta u + i\Delta v = 0$

$\Rightarrow \Delta u = \Delta v = 0$:

u e v sono armoniche in Ω

Teorema di Goursat. $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto:
$Hol(\Omega) \subseteq C^{\infty}(\Omega)$

(in termini moderni:
$\frac{\partial}{\partial \bar z}$ è un operatore ipoellittico).

Alcune regole di derivazione. $\Omega, A \subseteq \mathbb{C}$
$f: \Omega \to \mathbb{C}$; $g: A \to \mathbb{C}$; $f(\Omega) \subseteq A$
differenziabili $\Rightarrow$

$$\partial_z(g\circ f) = \partial_w g(f)\cdot \partial_z f + \partial_{\bar w} g(f)\cdot \partial_z \bar f$$

$$\partial_{\bar z}(g\circ f) = \partial_w g(f)\cdot \partial_{\bar z} f + \partial_{\bar w} g(f)\cdot \partial_{\bar z}(\bar f)$$

- In particolare: $g, f \in Hol$
$\Rightarrow g\circ f \in Hol$ e $(g\circ f)' = g'(f)\cdot f'$

$\mathbb{R} \supseteq I \xrightarrow{\gamma} \underset{\mathbb{C}}{\underset{\cap}{\Omega}} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$

$$\Rightarrow (f\circ\gamma)^{\bullet} = \frac{d(f\circ\gamma)}{dt} = \partial_z f(\gamma)\frac{d\gamma}{dt} + \partial_{\bar z} f(\gamma)\frac{d\bar\gamma}{dt}$$
$$= \partial_z f(\gamma)\cdot\dot\gamma + \partial_{\bar z} f(\gamma)\cdot\dot{\bar\gamma}$$

e $f \in Hol \Rightarrow (f\circ\gamma)^{\bullet} = Jf(\gamma)\cdot\dot\gamma = f'(\gamma)\cdot\dot\gamma$

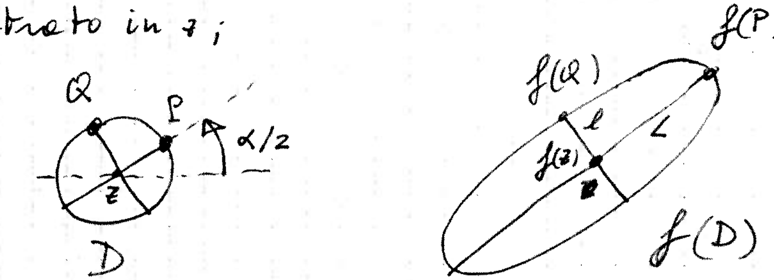
- $f, g \in Hol(\Omega) \Rightarrow (f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$

Esercizio. Sia $f \in C^1(\Omega, \mathbb{C})$, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto. Se f è un diffeomorfismo che conserva l'orientamento, allora $\exists \mu \in C(\Omega, \mathbb{C})$ t.c. $|\mu(z)| < 1 \quad \forall z \in \Omega$ e

(B) $\quad \partial_{\bar z} f = \mu \cdot \partial_z f \quad$ in Ω.

((B) è l'equazione di Beltrami).

Se $\mu = \rho \cdot e^{i\alpha}$, $\quad K := \frac{1+\rho}{1-\rho} = \frac{L}{l}$ è l'eccentricità dell'ellissi infinitesima $f(D)$, dove D è un disco infinitesimo centrato in z;



mentre $\alpha/2$ è l'argomento del punto su D corrispondente all'estremo del semiasse maggiore dell'ellissi.

(Da qui inizia la teoria delle mappe quasi-conformi).

Alcuni funzioni olomorfe.

- $m \in \mathbb{N}$, $f(z) = z^m \Rightarrow f'(z) = m \cdot z^m$
- $e^z = e^{x+iy} := e^x \cdot [\cos(y) + i \cdot \sin(y)]$
(Es. verificarlo).
- $f(z) = 1/z \quad (z \neq 0)$
- $f(z) = \log|z| + i \operatorname{arctg}\left(\frac{Im(z)}{Re(z)}\right)$

$(Re(z) \neq 0)$: f è (una determinazione del) logaritmo complesso.

Osservazioni.

$f \in Hol(\Omega) \Rightarrow f' = \partial_x f = -i \partial_y f$

In generale, se $v \in \mathbb{C}$, $v \neq 0$:

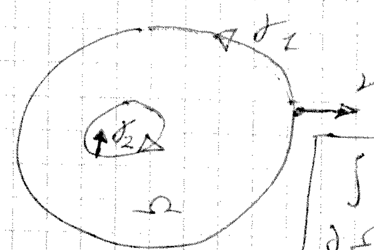
$$f'(z) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ \text{in } \mathbb{R}}} \frac{f(z+tv) - f(z)}{tv} = \frac{1}{v} \cdot \partial_v f(z);$$

$$\partial_v f(z) = v \cdot f'(z)$$

§3 - Integrali.

Teorema della divergenza in $\mathbb{R}^2$

- $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, limitato, $\partial\Omega$ C^1 a tratti; $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ parametrizzazioni regolari di $\partial\Omega$, compatibili con l'orientamento naturale; ν normale esterna;



- $F \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2)$

$$\boxed{\int_{\partial\Omega} F \cdot \nu \, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} F \, dx\,dy}$$

$$\nu = -i \frac{\dot\gamma}{|\dot\gamma|} = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot x \\ \dot y \end{pmatrix} / |\dot\gamma| = \frac{(+\dot y, -\dot x)}{|\dot\gamma|}$$

$d\sigma = |\dot\gamma| \, dt \qquad F = (+Q, -P)$

- $$\int_{\partial\Omega} P\,dx + Q\,dy = \int (Q\dot y + P\dot x)\,dt =$$
$$= \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu \, d\sigma = \int_\Omega \operatorname{div} F \, dx\,dy = \int_\Omega (-P_y + Q_x)\,dx\,dy$$

$$\therefore \int_{\partial\Omega} P\,dx + Q\,dy = \int_\Omega (-P_y + Q_x)\,dx\,dy$$

- Con le 1-forme: $\omega = P\,dx + Q\,dy$

$d\omega = (P_x\,dx + P_y\,dy) \wedge dx + (Q_x\,dx + Q_y\,dy) \wedge dy$

$= (-P_y + Q_x)\,dx \wedge dy$: $\int \omega = \int d\omega$

Poichè $\operatorname{div}(v \nabla u) = \nabla v \cdot \nabla u + v \Delta u$:

$$\int_{\partial\Omega} v\, \partial_\nu u \, d\sigma = \int_\Omega (\nabla v \cdot \nabla u + v \Delta u)\, dx\,dy,$$

$$\int_{\partial\Omega} (v \partial_\nu u - u \partial_\nu v)\, d\sigma = \int_\Omega (v \Delta u - u \Delta v)\, dx\,dy$$

se $u, v \in C^2(\Omega)$ — Formule di Green.

La forma complessa del Teorema della divergenza:

$$\int_{\partial\Omega} (f\, dz + g\, d\bar z) = \int_\Omega d(f\, dz + g\, d\bar z)$$

$$= \int_\Omega (\partial_z f\, dz + \partial_{\bar z} f\, d\bar z) \wedge dz + (\partial_z g\, dz + \partial_{\bar z} g) \wedge d\bar z$$

$$= \int_\Omega (\partial_z g - \partial_{\bar z} f)\, dz \wedge d\bar z,$$

dove $dz \wedge d\bar z = (dx + i\,dy) \wedge (dx - i\,dy)$
$= -2i\, dx \wedge dy$:

(1) $f, g \in C^1(\bar\Omega, \mathbb{C}) \Rightarrow$

$$\int_{\partial\Omega} (f\, dz + g\, d\bar z) = \int_\Omega (\partial_z g - \partial_{\bar z} f)\, dz \wedge d\bar z$$

Esercizio: giustificare i conti formali che portano a (1).

(2) $f \in C^1(\bar\Omega) \cap Hol(\Omega) \Rightarrow$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} f\, dz = 0 \quad \text{(baby-Cauchy).}$$

$\hookrightarrow$ l'ipotesi C^1 è superflua, vedremo.

(3) Se $f \in C^1(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, e $f = F'$, allora $\forall \Gamma : [a,b] \to \Omega$, C^1 a tratti,

$$\int_\Gamma f\, dz = F(\Gamma(b)) - F(\Gamma(a))$$

dim. $dF = \partial_z F \cdot dz + \partial_{\bar z} F \cdot d\bar z = f\, dz$ è esatta ∎

Formula di Pompeiu-Cauchy:

$\Omega \subseteq \mathbb{C}$ limitato, $\partial\Omega$ C^1 a tratti, $f \in C^1(\bar\Omega)$

$$\Rightarrow \forall z \in \Omega:\ f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi} \int_\Omega \frac{\bar\partial f(\zeta)\, dx\,dy}{\zeta - z}$$

dim. Sia $\varepsilon > 0$: $B(z,\varepsilon) = \{\zeta : |\zeta - z| < \varepsilon\} \subset\subset \Omega$ e $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{B(z,\varepsilon)}$. Allora

$$2i \int_{\Omega_\varepsilon} \bar\partial_\zeta \left(f(\zeta) \frac{1}{\zeta - z} \right) dx\,dy = 2i \int_{\Omega_\varepsilon} \bar\partial f(\zeta) \frac{dx\,dy}{\zeta - z} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 2i \int_\Omega \bar\partial f(\zeta) \frac{dx\,dy}{\zeta - z}$$

$\shortparallel \leftarrow$ STOKES

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon} f(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

$\shortparallel$

$$\int_{\partial\Omega} f(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \int_0^{2\pi} f(z + r e^{i\theta})\, i\, d\theta \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} - 2\pi i\, f(z)$$

... seguente.

1) Formula di Cauchy.

$f \in Hol(\Omega) \cap C^1(\bar\Omega) \Rightarrow$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

2) $f \in C^1_0(\Omega) \Rightarrow f(z) = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \bar\partial f(\zeta)\frac{dx\,dy}{\zeta - z}$

3) Ricostruzione di f da $\bar\partial f$:

$\phi \in C^1_0(\mathbb{C})$, $f(z) = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \phi(\zeta)\frac{dx\,dy}{\zeta - z} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar z}(z) = \phi(z)$

<u>dim.</u> $\frac{\partial}{\partial \bar z}\left(-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \phi(\zeta)\frac{dx\,dy}{\zeta - z}\right) =$

$$= \frac{\partial}{\partial \bar z}\left(-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \phi(\xi + z)\frac{du\,dv}{\xi}\right)$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial}{\partial \bar z}\phi(\xi + z)\frac{du\,dv}{\xi}$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial}{\partial \bar \xi}\phi(\xi + z)\frac{du\,dv}{\xi}$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial}{\partial \bar \zeta}\phi(\zeta)\frac{dx\,dy}{\zeta - z}$$

$\underset{\text{Pompeiu}}{\overset{=}{A}}$ $\phi(z)$: per il resto abbiamo solo usato invarianza per traslazioni ∎

Sulla derivata sotto segno d'integrale, vale il seguente

<u>Teorema.</u> $f : I \times X \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, (X, μ) di misura; f misurabile; $t \mapsto f(t, x) \in C^1(I)$ per q.o. x.

$x \mapsto f(x,t)$, $x \mapsto f'(x,t) \in L^1(X)$ $\forall t \in I$

e $|f'(x,t)| \le \Psi(x)$, $\Psi \in L^1(X)$

$$\Downarrow$$

$$\exists \frac{d}{dt}\int_X f(x,t)\,d\mu(x) = \int_X f'(x,t)\,d\mu(x).$$

<u>dim.</u> $h(t) := \int_X f'(x,t)\,d\mu(x)$, è continua per il teorema della convergenza dominata $\forall a, b \in I$,

$\int_a^b dt \int_X d\mu(x)\,|f'(x,t)| < +\infty \Rightarrow$

$$\int_a^b h(t)\,dt = \int_X \int_a^b f'(x,t)\,dt\,d\mu(x)$$

$$= \int_X [f(x,b) - f(x,a)]\,d\mu(x).$$

Derivando rispetto a b:

$$\int_X f'(x,b)\,d\mu(x) = h(b) = \frac{d}{db}\left\{\int_X f(x,b)\,d\mu(x)\right\}$$ ∎

(3) Se $\phi \in C_0^1(\mathbb{C})$ e $f(z) = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\phi(\zeta)}{\zeta - z}\,dx\,dy$,

allora $\frac{\partial}{\partial \bar z} f(z) = \phi(z)$. (*)

Cioè, l'equazione (*) ha una soluzione $f \in C^1(\mathbb{C})$ se $\phi \in C_0^1(\mathbb{C})$.

~~Oss.~~ Ciò può essere espresso così: sia $k(\zeta) = \frac{1}{\pi \zeta}$; allora

$f = k * \phi$ soddisfa $\bar\partial f = \phi$.

In senso distribuzionale,

$\bar\partial f = (\bar\partial k) * \phi$, quindi

$$\boxed{\bar\partial k = \delta_0}$$

(Per rendere del tutto preciso questo ragionamento occorre entrare più in profondità in merito alle distribuzioni).

<u>Esercizio.</u> Utilizzando le formule di Green, mostrare la formula di ricostruzione:

(1) $v \in C^2(\bar\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, limitato, ...

$\Rightarrow \forall z \in \Omega$: $v(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega} \log|\zeta - z| \cdot \Delta v(\zeta)\,dx\,dy$

$+ \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\partial\Omega} \{ v(\zeta)\, \partial_\nu \log|\zeta - z| - \log|\zeta - z|\, \partial_\nu v(\zeta) \}\, d\sigma(\zeta)$

(2) Dedurre che, se $\phi \in C_0^2(\mathbb{C})$, allora

$v(z) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} \phi(\zeta) \cdot \log|\zeta - z|\,dx\,dy$

risolve $\Delta v = \phi$ (Eq. di Poisson).

Cioè, se $k(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\log|\zeta|$, abbiamo

$$\boxed{\Delta k = \delta_0}$$

... conseguente.

(4) Teorema del valor medio.

$f \in Hol(\Omega) \cap C^1(\Omega)$; $\overline{B(z,r)} \subseteq \Omega$

$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta})\, d\theta$

dim. Esercizio ∎

(5) Principio del massimo modulo.

Se $f \in Hol(\Omega) \cap C^1(\Omega)$, $z_0 \in \Omega \underset{\text{ap. connesso}}{\subseteq} \mathbb{C}$ e z_0 è un punto di massimo per $|f|$ in Ω, allora f è costante in Ω.

dim. Sia $A = \{ z_0 \in \Omega : z_0$ è pto di max. per f in $\Omega \}$. A è chiuso in Ω.

Sia $z_0 \in A$ e $\overline{B(z_0, r_0)} \subseteq A$. Allora, se $0 < r \leq r_0$,

$|f(z_0)| \overset{T.V.M.}{=} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta \right|$

$\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|\, d\theta \leq$

$\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0)|\, d\theta = |f(z_0)|$,

quindi ogni $(\leq)$ è $(=)$.

Se $\exists \theta_0 : |f(z_0 + re^{i\theta_0})| < |f(z_0)|$, allora

$\exists \delta, \varepsilon > 0 : |\theta - \theta_0| < \delta \Rightarrow |f(z_0 + re^{i\theta})| \leq |f(z_0)| - \varepsilon$

(f è continua) $\Rightarrow$

$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|\, d\theta \leq |f(z_0)| - 2 \cdot \varepsilon\delta$, assurdo.

Dunque $|f(z)| = |f(z_0)|$ su $B(z_0, r_0) \subseteq A$, cioè A è aperto e chiuso $\Rightarrow A = \Omega$:

$|f|$ è costante in Ω. Ci basta:

<u>Lemma</u>. $|f|$ costante in $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, aperto connesso, con $f \in Hol(\Omega) \cap C^1(\Omega) \Rightarrow f$ costante in Ω.

dim. Sia $f = u + iv$, quindi $|f|^2 = u^2 + v^2$.

$0 = \nabla(|f|^2) = 2(uu_x + vv_x, uu_y + vv_y)$

$\overset{C.R.}{=} 2 \cdot (uu_x + vv_x, -u v_x + v u_x)$:

$(u, v), (u_x, v_x), (-v_x, u_x)$ sono ortogonali e due a due $\Rightarrow \forall z \in \Omega : f(z) = 0$

o $\partial_x f(z) = f'(z) = 0$.

Se $\exists z_0 \in \Omega : f(z) = 0$, essendo $|f|$ cost. in Ω, $f \equiv 0$ in Ω. Se $f(z_0) \neq 0 \ \forall z \in \Omega$, allora $f' \equiv 0$ in $\Omega \Rightarrow f$ è costante ∎

<u>Oss.</u> L'argomentazione precedente assicura che se z_0 è un punto di max. relativo per $f \in Hol(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ in $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, aperto, allora f è costante in un intorno di z_0.

(6) $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $f \in Hol(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$

$\Rightarrow \forall z \in \Omega$, $m \in \mathbb{N}$:

$$f^{(m)}(z) = \frac{m!}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{m+1}}\, d\zeta$$

(derivare la formula di Cauchy)

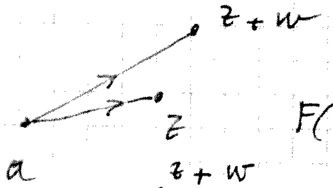
In particolare,

$f \in Hol(\Omega) \cap C^1(\Omega) \Rightarrow f \in C^\infty(\Omega)$.

<u>Teorema di Morera</u>. $f \in C(\Omega)$ e per ogni triangolo $\Delta \subseteq \Omega$: $\int_{\partial\Delta} f\, dz = 0$,

allora $f \in Hol(\Omega) \cap C^1(\Omega)$

<u>dim.</u> Basta mostrarlo se $\Omega = B(a, R)$ è un disco. Sia $F(z) = \int_{[a,z]} f(\zeta)\, d\zeta$



Per ipotesi:

$F(z+w) - F(z) =$

$$= \int_z^{z+w} f(\zeta)\, d\zeta = f(z) w + \int_z^{z+w} (f(\zeta) - f(z))\, d\zeta$$

$$\Rightarrow \frac{F(z+w) - F(z)}{w} = \frac{1}{w} \int_z^{z+w} f(\zeta)\, d\zeta =$$

$$= f(z) + \frac{1}{w} \int_z^{z+w} (f(\zeta) - f(z))\, d\zeta$$

scelto $\varepsilon > 0$ e $\delta(\varepsilon) > 0$:

$|\zeta - \cancel{z}| \leq \delta \Rightarrow |f(\zeta) - f(z)| \leq \varepsilon$

si ha che $|w| \leq \delta \Rightarrow$

$$\left| \frac{1}{w} \int_z^{z+w} (f(\zeta) - f(z))\, d\zeta \right| \leq \varepsilon$$

$\Rightarrow \quad \exists\, F'(z) = f(z)$, $\quad \partial_{\bar z} F(z) = 0$

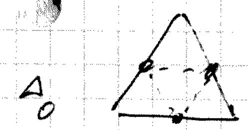
$\qquad \overset{\shortparallel}{\partial_z F(z)}$,

in particolare $F \in C^1(\Omega) \cap Hol(\Omega)$,

~~dunque~~ dunque $F \in C^\infty \Rightarrow f = \partial_z F \in C^\infty$.

<u>Teorema di Goursat</u>. $f \in Hol(\Omega)$, Ω aperto in $\mathbb{C}$ $\Rightarrow f \in C^1(\Omega)$ (quindi $f \in C^\infty(\Omega)$).

<u>dim.</u> $f \in Hol(\Omega) \Rightarrow f \in C(\Omega)$. Verifico le ipotesi di Morera e sono a posto.



Sia $\Delta_0 \subseteq \Omega$ un triangolo. Lo divido in 4 triangoli uguali come in figura.

Suppongo che $I := \int_{\partial\Delta_0} f\, d\zeta \neq 0$.

Siano $\Delta_1', \dots, \Delta_4'$ i triangolini:

$$I = \sum_{j=1}^4 \int_{\partial\Delta_j'} f\, d\zeta = \sum_{j=1}^4 I_j'$$

$\Rightarrow \exists\, j_1 \in \{1, \dots, 4\}$ t.c. $|I'_{j_1}| \geq \frac{1}{4} |I|$.

..., trovo

$\Delta_0 \supset \Delta^1_{j_1} \supset \Delta^2_{j_2} \supset \dots$

t.c. $|I^n_{j_n}| := \left| \int_{\partial \Delta^n_{j_n}} f\, d\zeta \right| \geq 4^{-n} \cdot |I|$.

Sia $z_0 = \bigcap \Delta^n_{j_n}$. Poiché $\exists f'(z_0): \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$:

$$|f(z) - f(a) - (z-a) f'(a)| < \varepsilon |z-a|,\ |z-a| < \delta.$$

Per $n \geq n(\delta)$: $\Delta^n_{j_n} \subseteq B(a, \delta)$, quindi

$$\left| \int_{\partial \Delta^n_{j_n}} f\, dz \right| = \left| \int_{\partial \Delta^n_{j_n}} [f(z) - f(a) - f'(a)(z-a)]\, dz \right|$$

$$\leq \varepsilon \cdot \int_{\partial \Delta^n_{j_n}} |z-a| \cdot |dz| \leq \varepsilon |\partial \Delta^n_{j_n}|^2 = \varepsilon \cdot 4^{-n} |\partial \Delta_0|$$

Insieme con la stima precedente,

$|I| \leq \varepsilon \cdot |\partial \Delta_0| \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow I = 0$, ass. ∎

Dora in poi parleremo semplicemente di $Hol(\Omega)$.

04. Serie di potenze. ESERCIZIO:

$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ succ. in $\mathbb{C}$ con

$$R^{-1} := \overline{\lim_{n \to \infty}} |c_n|^{1/n}.$$

Allora $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

converge uniformemente sui compatti di $B(0,R)$ [cioè, converge unif. su ogni $K \subset B(0,R)$, K compatto].

Prop. La f definita sopra sta in $Hol(B(0,R))$;

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot c_n \cdot z^{n-1} \text{ in } B(0,R) \text{ e}$$

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta$$

$(0 < r < R)$.

Prima dobbiamo dire qualcosa sulla convergenza uniforme sui compatti (u.c.).

Prop. Siano $f_n \in Hol(\Omega)$

(0) $f_n \xrightarrow[n]{} f$ u.c. $\Rightarrow f \in Hol(\Omega)$ e

$f_n^{(j)} \xrightarrow[n]{} f^{(j)}$ u.c. $\forall j \geq 1$

~~ii) $f_n \xrightarrow[n]{} f$ in $L^1_{loc}(\Omega)$~~

~~$\Rightarrow \exists\, g \in Hol(\Omega)$ t.c. $f = g$ q.o.~~

~~e $f_n^{(j)} \xrightarrow[n]{} g^{(j)} \quad \forall j \geq 1$.~~

~~Ricordo $f_n \xrightarrow[n]{} f$ in $L^1_{loc}(\Omega)$ significa~~

~~$\forall K \subset \Omega$ compatto: $\int_K |f_n - f|\, dx\, dy \xrightarrow[n]{} 0$~~

~~Dim. (ii) ha ipotesi più deboli~~:

~~mostro quello.~~

Dim. Sia $\Delta \subseteq \Omega$ un triangolo.

$0 = \int_{\partial\Delta} f_n\, dz \xrightarrow[n]{} \int_{\partial\Delta} f\, dz$, ~~e così~~ segue

dal Teorema di Morera che $f \in Hol$.

Che $f_n^{(j)} \xrightarrow[n]{} f^{(j)}$ u.c.

segue dalla formula

$$f^{(j)}(z_0) = \frac{j!}{2\pi i} \int_{|z - z_0| = r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{j+1}}\, dz$$

e facili conti. (Esercizio) ∎

Dim. della proposizione.

$$f(z) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$$

è un limite u.c. in $B(0,R)$.

Quindi $f'(z) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$,

$$f^{(m)}(z) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{(n-m)!} a_n z^{n-m}$$

$\Rightarrow f^{(m)}(0) = m!\, a_m$ ∎

Viceversa, se $f \in Hol(B(0,R))$, allora

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n,$$

la convergenza essendo u.c. in $B(0,R)$.

Dim. $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \quad (|z| < r)$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta| = r} f(\zeta) \frac{1}{\zeta} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n d\zeta$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta \cdot z^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

Il fatto che f sia sviluppabile in serie impone una serie di restrizioni.

<u>Prop.</u> Sia $f \in Hol(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $f \not\equiv 0$, $z_0 \in \Omega$, $f(z_0)=0$. Allora $\exists\, m \geq 1$ t.c. $f(z)=(z-z_0)^m \cdot h(z)$ con $h \in Hol(\Omega)$, $h(z) \neq 0$ in un intorno di z_0.

<u>Dim.</u> $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ se $|z-z_0|<r$. Chiaramente $a_0=0$. Siano $a_0=a_1=\dots=a_{m-1}=0\neq a_m$. Allora $f(z)=(z-z_0)^m \cdot \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n-m}$ in $B(0,r)$, cioè

$$h(z) := \frac{f(z)}{(z-z_0)^m},$$

$h \in Hol(B(0,r))$. Ovviamente $h(z_0)\neq 0$ e $h \in Hol(\Omega \setminus \{z_0\}) \Rightarrow h \in Hol(\Omega)$ ■

<u>Corollari</u> (i) gli zeri di $f \in Hol(\Omega)$ sono isolati;

(ii) ogni zero di f ha ordine finito e intero;

(iii) Siano $f, g \in Hol(\Omega)$, Ω connesso. Se $f(z)=g(z)$ $\forall z \in E \subseteq \Omega$ e E ha un punto di accumulazione in Ω, allora $f \equiv g$ in Ω.

(iv) $f \in Hol(\Omega\setminus\{z_0\})$ e $\lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z) = 0 \Rightarrow \exists\, f(z_0) := \lim_{z\to z_0} f(z)$ e $f \in Hol(\Omega)$ [cioè, f ha una "singolarità minima"].

<u>Dim.</u> <u>Lemma</u> $f \in Hol(\Omega\setminus\{z_0\}) \cap C(\Omega) \Rightarrow f \in Hol(\Omega)$. <u>Dim.</u> Esercizio sul Teorema di Morera ■

$g(z) := (z-z_0) f(z)$, $g(z_0) := 0 \Rightarrow g \in C(\Omega) \cap Hol(\Omega\setminus\{z_0\}) \Rightarrow g \in Hol(\Omega)$ e $g(z_0)=0 \Rightarrow g(z) = (z-z_0)\cdot h(z)$, con $h \in Hol(\Omega)$. Abbiamo che $h(z) = f(z)$ se $z \neq z_0$, quindi f si estende come previsto ■

(v) $f \in Hol(\Omega)$, Ω connesso, $z_0 \in \Omega$ p.to di MAX. relativo per $f \Rightarrow f$ è costante (ESERCIZIO)

§ 5 - Alcune proprietà geometriche e topologiche.

Teorema della mappa inversa.
Siano $\Omega \xrightarrow{f} \mathbb{C} \in Hol(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$ sup. ins. $w_0 = f(z_0)$ e $f'(z_0) \neq 0$. Allora esistono $A \subseteq \Omega$, $z_0 \in A$; $B \subseteq \mathbb{C}$, $w_0 \in B$ e $B \xrightarrow{g} \mathbb{C}$ olomorfa t.c. $g(f(z)) = z \; \forall z \in A$ e f, g sono biiezioni $A \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B$.

Dim. Suppongo $z_0 = 0 = w_0$ e $f'(0) = 1/2$ (altrimenti, sostituisco f con $f_1(z) = \frac{f(z)}{2}$).

Pongo, per $w \in \mathbb{C}$,
$$T_w(z) = z - f(z) + w;$$
$f(z) = w \iff T_w(z) = z$.

Mostro che $\exists \delta > 0 \; \exists \varepsilon > 0 \; \exists \lambda \in (0,1)$:

(i) $|w| \leq \delta$ e $|z| \leq \varepsilon \Rightarrow |T_w(z)| \leq \varepsilon$

(ii) $|T_w(z_2) - T_w(z_1)| \leq \lambda \cdot |z_2 - z_1|$.

Ciò fatto, il Teorema delle contrazioni mi assicura che $\forall w \in \overline{B(0,\delta)}$ $\exists!\, z \in \overline{B(0,\varepsilon)}$: $T_w(z) = z$; cioè che $f(z) = w$. Inoltre:
$$z = \lim_{n \to \infty} T_w^{\circ n}(0), \text{ con } T_w^{\circ n} = \underbrace{T_w \circ \dots \circ T_w}_{n \text{ volte}}.$$

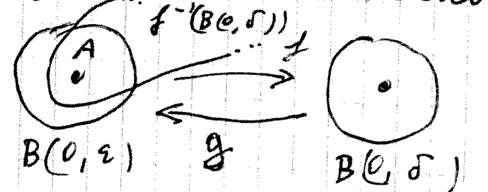
La dimostrazione del Teorema delle contrazioni mostra che $T_w^{\circ n}(0)$ converge uniformemente in $w \in \overline{B(0,\delta)}$:
$$|T_w^{\circ(n+m)}(0) - T_w^{\circ m}(0)| \leq \lambda^m \cdot |T_w^{\circ n}(0)|$$
$$= \lambda^m \left| \left(T_w^{\circ n}(0) - T_w^{\circ(n-1)}(0)\right) + \left(T_w^{\circ(n-1)}(0) - T_w^{\circ(n-2)}(0)\right) + \dots + T_w(0) \right|$$
$$\leq \lambda^m \cdot (\lambda^{n-1} + \dots + \lambda + 1) \cdot |T_w(0)|$$
$$\leq \frac{\lambda^m}{1-\lambda} \cdot |w| \xrightarrow[m \to \infty]{} 0 \quad \text{unif. in } w \in \overline{B(0,\delta)}.$$

Poiché $T_w^{\circ n}(0)$ è olomorfa in w $\forall n$,
$z = g(w) := \lim_{n \to \infty} T_w^{\circ n}(0)$ è olomorfa.

Abbiamo quindi $g : B(0,\delta) \to \mathbb{C}$ olomorfa; $f(g(w)) = w \quad \forall w \in B(0,\delta)$.

Sia $A = f^{-1}(B(0,\delta)) \cap B(0,\varepsilon)$: A aperto, $A \ni 0$.

Se $w \in B(0,\delta)$, allora $g(w) \in B(0,\varepsilon)$.
Infatti, $g(w) \in \overline{B(0,\varepsilon)}$ e se $|g(w)| = \varepsilon$, w è p.to di max. per g in $B(0,\delta)$ $\Rightarrow g$ è costante: assurdo.



Ne segue che $f : A \to B(0,\delta)$ è una biiezione con inversa olomorfa.

... dimostrare (i), (ii).

(i) $|T'_w(z)| \leq |z - f(z)| + |w|$

$\leq \frac{|z|}{2} + O(z^2) + |w| \leq |z|$

se $|z| \leq \varepsilon$ dove $|z| \leq \varepsilon \Rightarrow O(z^2) \leq \frac{\varepsilon}{4}$

e $|w| \leq \varepsilon/4$.

(ii) $|T'_w(z_2) - T'_w(z_1)| \leq$

$\leq |(z_2 - f(z_2)) - (z_1 - f(z_1))|$

$= |h(z_2) - h(z_1)|$, con $h(z) = z - f(z)$,

$= \left| \int_{z_1}^{z_2} h'(s)\, ds \right| \leq \sup_{|s| \leq \varepsilon} |h'(s)| \cdot |z_2 - z_1|$

Poiché $h'(0) = \frac{1}{2}$ e $h \in C^1$, per $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo ho che

$$\sup_{|s| \leq \varepsilon} |h'(s)| \leq \frac{3}{4} = \lambda$$

<u>Esercizio</u>. Una dimostrazione alternativa si basa sui seguenti ingredienti.

Se g è la funzione inversa di f e $f(0) = 0$, allora

$f(g(w)) = w \quad \forall w \in B$

$\Rightarrow f'(g(w)) \cdot g'(w) = 1$; $g(0) = 0$

Letto questo come un problema di Cauchy:

$$(*) \begin{cases} g'(w) = \dfrac{1}{f'(g(w))} \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

In generale, posso mostrare il seguente ~~problema~~. Teorema.

(•) Sia $A \in Hol(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $z_0 \in \Omega$; $w_0 \in \Omega$. Allora $\exists\, \varepsilon > 0$ e $g \in Hol(B(z_0, \varepsilon))$ t.c.

$$\begin{cases} g(B(z_0, \varepsilon)) \subseteq \Omega \\ g(z_0) = w_0 \\ \forall z \in B(z_0, \varepsilon): \quad g'(z) = A(g(z)) \end{cases}$$

Di più, se $h \in Hol(B(z_0, \varepsilon'))$ è un'altra soluzione, $h(z) = g(z) \quad \forall z \in B(z_0, \min(\varepsilon, \varepsilon'))$.

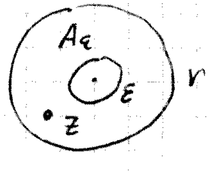
- Dimostrare (•)
- Mostrare che la soluzione di (*) dà una soluzione al problema della funzione inversa.

<u>NOTA</u>. Vediamo una <u>terza</u> dimostrazione

Proposizione. $f \in Hol(B(0,R) \setminus \{0\})$
$\Rightarrow f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n z^n$

con $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta$, $n \in \mathbb{Z}$.

Dim. Consideriamo l'anello A_ε in figura.



$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A_\varepsilon} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

$$= I_1 + I_2$$

In I_1, $|z| < |\zeta|$, quindi

$$I_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \cdot z^n$$

In I_2, $|z| > |\zeta|$, quindi

$$I_2 = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{+1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\varepsilon} f(\zeta) \cdot \zeta^m d\zeta \cdot \frac{1}{z^{m+1}}$$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} f(\zeta) \cdot \zeta^m d\zeta \cdot \frac{1}{z^{m+1}}$$

olomorfia di $\zeta \mapsto f(\zeta)\zeta^m$

$$= \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{-m+1}} d\zeta \cdot \frac{1}{z^m} \quad \blacksquare$$

- La serie converge u.c. in $\{0 < |z| < R\}$.

La singolarità di f in $z=0$ è

- rimovibile se $c_n = 0$ $\forall n < 0$
- un polo di ordine n se $c_{-n} \neq 0$, $c_k = 0$ $\forall k < -n$
- essenziale altrimenti.

Notare che se $z=0$ è un polo, allora $\lim_{z \to 0} f(z) = \infty$.

- **(Piccolo) Teorema di Picard.** Se $z=0$ è una singolarità essenziale per f, $\forall r > 0$: $f(B(0,r))$ è densa in $\mathbb{C}$.

Dim. Sia $w \in \mathbb{C}$: $f(B(0,r)) \cap B(w,\varepsilon) = \emptyset$ $\exists \varepsilon > 0$ e sia $g(z) = \frac{1}{f(z) - w}$.

g è limitata in $B(0,r)$, ~~in un intorno di~~

quindi s'estende a una funzione olomorfa in $z=0$:

$$\frac{1}{f(z) - w} = z^N \cdot h(z), \text{ con } h(0) \neq 0.$$

$$\Rightarrow f(z) = w + \frac{h(z)^{-1}}{z^N} \text{ ha un}$$

polo in $z=0$.

Esercizio. Implicitamente, abbiamo usato l'unicità dei coeff. c_n: dimostrarla.

Def. $\operatorname{Res}(f,a) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = r} f(\zeta)\, d\zeta = c_{-1}$

è il residuo di f in a.

Esercizio. $f \in Hol(\Omega \setminus \{a_1, \dots, a_n\}) \cap C^1(\overline{\Omega} \setminus \{a_1, \dots, a_n\})$

$\Rightarrow \int_{\partial\Omega} f(\zeta)\, d\zeta = 2\pi i \cdot \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}(f, a_j)$.

Proposizione. $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ meromorfa [cioè, $f \in Hol(\Omega \setminus N)$ e N non ha punti di accumulazione in N; f ha un polo in a $\forall a \in N$]

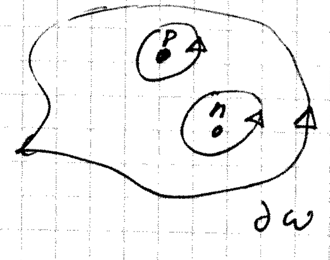
$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\omega} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta = N_f - P_f$

$\forall\, \omega$ aperto, $\overline{\omega} \subset \Omega$, $\partial\omega$ non ha poli o zeri di f

con $N_f = \#\{$zeri di f in ω con molteplicità$\}$ e

$P_f = \#\{$poli di f in ω con molteplicità$\}$.

dim.



Uso Cauchy per ridurmi a dischetti.

Se $f(z) = (z-n)^k g(z)$, $g(n) \neq 0$,

allora $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)} + \frac{k}{z-n}$

$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-n|=\varepsilon} f'(z)/f(z)\, dz = k \in \mathbb{Z}$. ∎

Teorema di Rouché. $[0,1] \times \Omega \xrightarrow{f} \mathbb{C}$, $(t,z) \longmapsto f(t,z)$ è una famiglia di funzioni; $f \in C([0,1] \times \Omega)$ e $f(t,\cdot) \in Hol(\Omega)$ $\forall t \in [0,1]$.

Se $f \neq 0$ su $[0,1] \times \partial\omega$, $\omega \subset\subset \Omega$, allora $f(0,\cdot)$ e $f(1,\cdot)$ hanno lo stesso numero di zeri in ω.

dim: $t \longmapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\omega} \frac{f'(t,\zeta)}{f(t,\zeta)}\, d\zeta$ è continua, a valori in $\mathbb{N}$ $\Rightarrow$ è costante ∎

1-ciclo: $\Gamma = \sum_{j=1}^{n} \Gamma_j$, Γ_j chiuse a C^1 a tratti.

$z \longmapsto \mathrm{Ind}_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{ds}{s-z} :=$

$= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} \frac{ds}{s-z}$: indice di Γ rispetto a z.

<u>Lemma.</u> $V \subseteq \mathbb{C}$ convesso, $f \in Hol(V)$, $f \neq 0$ in V. Allora $\exists h \in Hol(V)$: $\exp h = f$ e $h' = f'/f$.

<u>dim.</u> $h' := f'/f \in Hol(V)$

$\Rightarrow h(z) := a + \int_{z_0}^{z} h'(s)\, ds = a + \int_{z_0}^{z} \frac{f'(s)}{f(s)}\, ds$

è ben definito.

$\frac{d}{dz}(e^h)(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} \cdot e^{h(z)}$

cioè, $H := e^h$ è soluzione di

$$(*) \begin{cases} H' = \frac{f'}{f} H \\ H(z_0) = e^a \end{cases}$$

f è una soluzione dello stesso problema di Cauchy con $H(z_0) = f(z_0)$, quindi $H \equiv f$ se $e^a = f(z_0)$ (a è determinato a meno di $2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$):

$h(z) = \log f(z_0) + \int_{z_0}^{z} \frac{f'(s)}{f(s)}\, ds$ *

<u>Corollario.</u> V, f come sopra $\Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ $\exists g \in Hol(V)$: $g^m = f$.

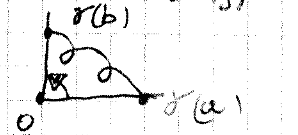
<u>dim.</u> $g(z) = e^{\frac{h(z)}{m}}$ ∎

<u>Interpretazione</u>:

$\mathrm{Ind}_\Gamma(z)$ è il numero di giri che Γ fa (+ in senso antiorario, − in orario) attorno a z. Infatti,

$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{ds}{s}$, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$

è la [variazione dell'angolo lungo γ da $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$]/ 2π :



Teorema della mappa aperta.

$f \in Hol(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto $\Rightarrow f(\Omega)$ è aperto.

Dim. Sia $z_0 \in \Omega$. Se $f'(z_0) \neq 0$, $\exists\, U_{z_0}, V_{f(z_0)}$: $f(U_{z_0}) = V_{f(z_0)}$, per il teorema della funzione inversa.

Altrimenti, $f(z) = (z - z_0)^m \cdot g(z) + f(z_0)$ con $m \geq 2$ (suppongo $z_0 = f(z_0) = 0$); $g(z_0) \neq 0$.

$f(z) = z^m \cdot g(z)$, $g(0) \neq 0$

Allora $\exists\, \varepsilon > 0$: $g(z) = h(z)^m$ in $B(0, \varepsilon)$, $h(z) \neq 0$: $f(z) = (z \cdot h(z))^m$ in $B(0, \varepsilon)$

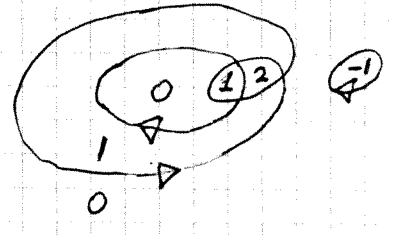
Ora, $\exists\, A \subseteq B(0, \varepsilon')$, $A \ni 0$, A aperto

$z \longmapsto z \cdot h(z) = \zeta$ applica A su $B(0, \delta)$ $(\exists\, \delta > 0)$ per la funz. inversa

e $\zeta \longmapsto \zeta^m$ mappa $B(0,\delta)$ su $B(0, \delta^m)$, (Esercizio). In toto, abbiamo il teorema ▣

Oss. La dim. ci dà un'informazione completa sul comportamento di $f \in Hol(\Omega)$, localmente.

Esempio di indice.



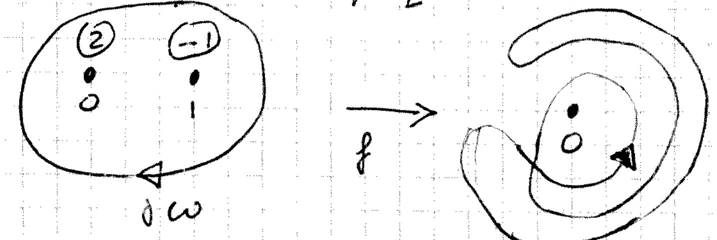
• Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ chiusa, C^1 a tratti, $\gamma([a,b]) \subseteq \Omega$, ~~f ∈ Hol(Ω)~~ f meromorfa in Ω.

(a) $\mathrm{Ind}_{f \circ \gamma}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{f \circ \gamma} \frac{dw}{w} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$

(b) se $\gamma = \partial\omega$, $\mathrm{Ind}_{f \circ \gamma}(0) = N_f - P_f$

$\therefore\ N_f - P_f = \mathrm{Ind}_{f \circ \partial\omega}(0)$

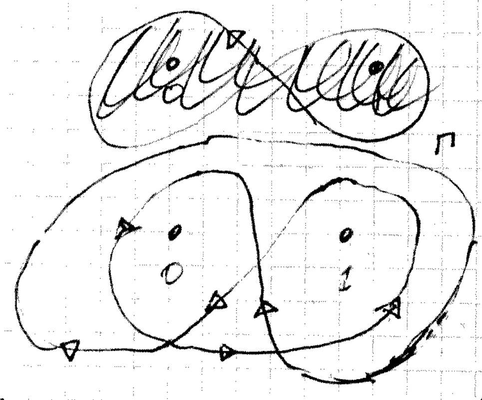
Esempio: $f(z) = \frac{z^2}{1 - z}$



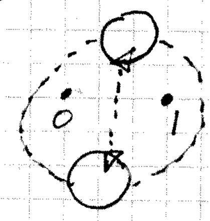
Omologia e omotopia.

<u>Def.</u> Un 1-ciclo Γ è 0-omologo rispetto a Ω (Γ in Ω) se $Ind_\Gamma(a) = 0 \quad \forall a \notin \Omega$.

<u>Es.</u> $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$



Γ è 0-omologo



<u>Teorema</u> (Cauchy-omologia)

$f \in Hol(\Omega)$ e Γ è 0-omologo $\Rightarrow \int_\Gamma f(\zeta)\,d\zeta = 0$ e

$z \in \Omega \setminus \Gamma \Rightarrow f(z) \cdot Ind_\Gamma(z) =$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}$$

<u>Dim.</u> Sia $H = \Gamma \cup supp(Ind_\Gamma)$, ~~[illegible]~~ H compatto in Ω (esercizio). Sia $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$: $\phi \equiv 1$ in un intorno di H. Allora

$$f(z) \underset{z \in H}{=} \phi(z) f(z) = -\frac{1}{\pi} \int \frac{\partial \phi}{\partial \bar{\zeta}} \cdot \frac{f(\zeta)\,dx\,dy}{\zeta - z}$$

$\Downarrow$ Fubini (esercizio)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z)\,dz = -\frac{1}{\pi} \int \frac{\partial \phi}{\partial \bar{\zeta}} \cdot f(\zeta) \cdot \left(\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dz}{\zeta - z} \right) dx$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int \frac{\partial \phi}{\partial \bar{\zeta}} f(\zeta) \cdot Ind_\Gamma(\zeta) \cdot dx\,dy$$

$= 0$ perché $supp\left(\frac{\partial \phi}{\partial \bar{\zeta}}\right) \cap supp(Ind_\Gamma) = \emptyset$

Ciò mostra la prima affermazione.

Per la seconda, essendo $\zeta \mapsto \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}$ olomorfa, abbiamo che

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - f(z) \cdot Ind_\Gamma(z).$$

<u>Teorema.</u> γ_0, γ_1 curve in Ω, chiuse C^1. Se γ_0 e γ_1 sono omotope in Ω, allora sono omologhe.

dim. Sappiamo che esiste
$H: [0,1]^2 \longrightarrow \Omega$ continua t.c.
$H(0,t) = \gamma_0(t)$; $H(1,t) = \gamma_1(t)$;
$H(s,0) = H(s,1)$.
Il problema è che non sappiamo
che $\gamma_s(t) = H(s,t)$ è C^1 a tratti e ciò
pone un problema con gli integrali.
Uso la continuità uniforme di H.
$\exists n \in \mathbb{N}: \forall P,Q \in H([0,1]^2): |P-Q| \leq \frac{1}{n} \Rightarrow$
$|H(P) - H(Q)| \leq 8^{-1} \cdot dist(H([0,1]^2), \Omega^c) = 8^{-1} \cdot \varepsilon$
$\forall j,k = 1 \dots n$ il quadrangolo Q di lati
$H\left(\frac{j-1}{n}, \frac{k-1}{n}\right)$, $H\left(\frac{j}{n}, \frac{k-1}{n}\right)$, $H\left(\frac{j-1}{n}, \frac{k}{n}\right)$,
$H\left(\frac{j}{n}, \frac{k}{n}\right)$ è contenuto in Ω:
$\forall A \in Q: dist\left(A, H\left(\frac{j}{n}, \frac{k}{n}\right)\right) \leq$
$\leq$ Perimetro $(Q) \leq \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow A \in \Omega$
$\Rightarrow \left(z \notin \Omega \Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 0\right)$.
Sommando su tutti i quadrangoli
e tenendo conto della condizione
$H(s,0) = H(s,1)$, abbiamo

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\left[\gamma_0\left(\frac{k-1}{n}\right), \gamma_0\left(\frac{k}{n}\right)\right]} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\left[\gamma_1\left(\frac{k-1}{n}\right), \gamma_1\left(\frac{k}{n}\right)\right]} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

Facendo tendere $n \to \infty$:
$$Ind_{\gamma_0}(z) = Ind_{\gamma_1}(z). \blacksquare$$

Verso la topologia algebrica.