# Prova scritta complessiva di Analisi Matematica II

Ingegneria Edile-Architettura, 2009/10

9 febbraio 2010

Per essere ammessi prova orale occorre ottenere almeno 15 pt.
**Segnare qui** un giorno in cui **non** si vuole sostenere la prova orale:...............................................

**(1)** [8 pt.] Siano $\Omega = \{(x, y, z) : \frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} \leq 1, \ -1 \leq y \leq 0, z \geq 0\} \cup \{(x, y, z) : \frac{x^2}{9} + y^2 + \frac{z^2}{4} \leq 1, \ z \geq 0, \ y \geq 0\} \subset \mathbb{R}^3$ e $F = (2x^2y, 2y, 0)$, $F \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$.
Disegnare (qualitativamente) $\Omega$ e calcolare

$$\iint_{\partial\Omega} F \cdot \nu d\sigma,$$

il flusso di $F$ attraverso il bordo di $\Omega$ orientato secondo la normale esterna.

**(2)** [4 pt.] Trovare l'integrale generale reale di

$$(y' + 3y)' = x$$

**(3)** Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = 3x^2y + 2xy^2 - xy + 17$$

2 pt. Trovare i punti critici di $f$.

3 pt. Classificare i punti critici di $f$.

(4) [5 punti] Calcolare l'integrale

$$\iint_A (2x-1)\cos(y)dxdy,$$

dove

$$A = \{(x,y) : \frac{x-x^2}{3} \le y \le 3(x-x^2)\}.$$

(5) [4 punti] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e si definisca $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$h(u,v) = (u\cos(v), u\sin(v), f(u)).$$

Calcolare $V(u,v) := \partial_u h(u,v) \times \partial_v h(u,v)$ [2 punti] e trovare una condizione su $f$ tale per cui, per ogni $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, si abbia che $V(u,v) \parallel h(u,v)$ ($\parallel$ è la relazione di *parallelismo* tra vettori).

(5) [4 pt. se la risposta è esatta, $-1$ se è errata] Siano $f, g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ due funzioni. Quali delle seguenti affermazioni è necessariamente vera?

- Se $f(0) = g(0)$ e $f'(0) = g'(0)$, allora $f$ e $g$ sono linearmente dipendenti.

- Se $f$ e $g$ sono linearmente indipendenti e sono entrambe soluzioni della stessa equazione differenziale

$$(\star) \quad z'' + b(x)z' + c(x)z = 0,$$

con coefficienti $b, c \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, allora $f(0)+g(0) \neq 0$ o $f'(0)+g'(0) \neq 0$.

- Se $f$ e $g$ sono liearmente indipendenti e $f(0) = g(0)$, allora non sono entrambe soluzioni di $(\star)$.

- Se $f$ e $g$ sono linearmente dipendenti e $f(0) = g(0)$, allora $f'(0) = g'(0)$.

(1) $$\iint_{\partial\Omega} F\cdot\nu \, d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F \, dx\, dy\, dz =$$

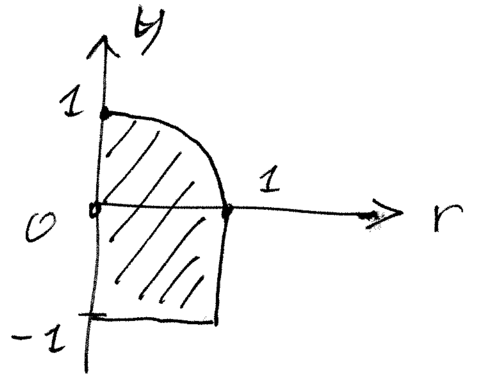
$$= \iiint_{\Omega} (4xy + 2)\, dx\, dy\, dz =: I$$

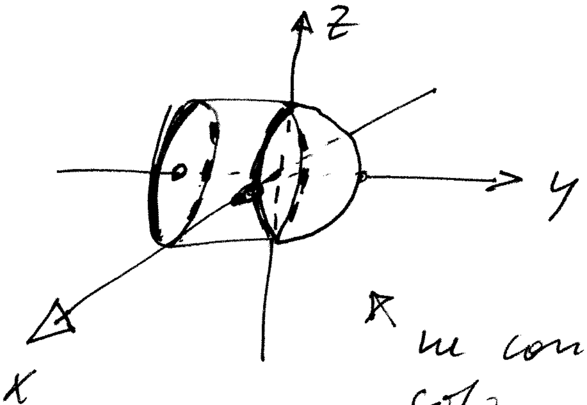
Pongo $\begin{cases} x = 3r\cos\theta \\ z = 2r\sin\theta \\ y = y \end{cases}$

$r \geq 0;\ r^2 \leq 1;\ -1 \leq y \leq 0;\ 0 \leq \theta \leq \pi$

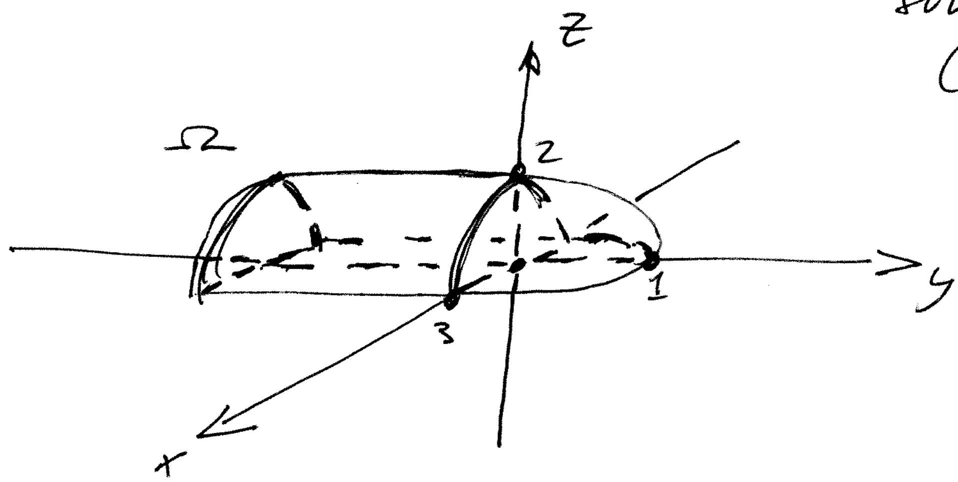
oppure

$r \geq 0;\ r^2 + y^2 \leq 1;\ y \geq 0;\ 0 \leq \theta \leq \pi$




si considera solo metà ($z \geq 0$).




$dx\, dy\, dz = 6r\, dr\, d\theta\, dy$

Poiché $\Omega$ è simmetrico rispetto a $x$ e $4xy$ è dispari rispetto a $x$, ho che $\iiint_{\Omega} 4xy \, dx\, dy\, dz = 0$

$$\Downarrow$$

$$I = \iiint_{\Omega} 2 \cdot dx\, dy\, dz = I_1 + I_2$$

$$I_2 = 2\cdot\int_0^{\pi} d\theta \cdot \iint_{\substack{\{r^2+y^2 \leq 1 \\ y\geq 0,\, r\geq 0\}}} 6r\, dr\, dy = 12\cdot\pi\cdot \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} r\, dr = 12\cdot\pi\cdot\int_0^1 \frac{1-y^2}{2}\, dy$$

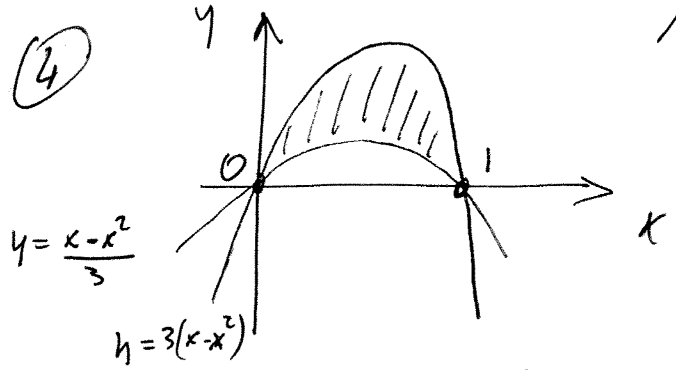
$$= 6\pi\cdot\left(y - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^1 = 6\pi\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right) = 4\pi$$

$$I_2 = 2\cdot\int_0^{\pi} d\theta \int_{-1}^{0} dy \int_0^1 6r\,dr = 2\cdot\pi\cdot 1\cdot 6\cdot \frac{1}{2} = 6\pi$$

$$I = 10\pi.$$

---

(4)




$A = \left\{ (x,y) : \ 0 \le x \le 1 \ \text{ e } \ \frac{x-x^2}{3} \le y \le 3(x-x^2) \right\}$

$$\iint_A (2x-1)\cdot\cos(y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^1 (2x-1)\,dx \int_{\frac{x-x^2}{3}}^{3(x-x^2)} \cos(y)\,dy = \int_0^1 (2x-1)\cdot\Big[\sin(y)\Big]_{\frac{x-x^2}{3}}^{3\cdot(x-x^2)}$$

$$= \int_0^1 (2x-1)\cdot\left[\sin\left(3(x-x^2)\right) - \sin\left(\frac{x-x^2}{3}\right)\right] dx$$

$$= -\left[\frac{\cos\left(3(x-x^2)\right)}{3}\right]_0^1 + \left[3\cdot\cos\left(\frac{x-x^2}{3}\right)\right]_0^1 = 0+0=0$$

---

(5) $\partial_u h(u,v) = (\cos(v), \sin(v), f'(u))$

$\partial_v h(u,v) = (-u\cdot\sin(v), u\cdot\cos(v), 0)$

$$\partial_u h(u,v) \times \partial_v h(u,v) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos(v) & \sin(v) & f'(u) \\ -u\cdot\sin(v) & u\cdot\cos(v) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left(-f'(u)\cdot u\cdot\cos(v);\ -f'(u)\cdot u\cdot\sin(v);\ u\right) = V(u,v)$$

e $V(u,v) \parallel h(u,v) = (u\cdot\cos(v);\ u\sin(v);\ f(u)) \iff$

$\exists \lambda = \lambda(u,v): \ -f'(u)\cdot u = \lambda\cdot u$ e $u = \lambda\cdot f(u)$; cioè

$\lambda = u/f(u)$ e $\lambda = -f'(u)$; cioè $\boxed{u + f(u)f'(u) = 0 \ \forall u \in \mathbb{R}}$

(2) $y'' + 3y' = x$

Omogenea $z'' + 3z' = 0$; eq. caratt. $\lambda^2 + 3\lambda = 0$

$\lambda = 0,\ \lambda = -3$

I G (omogenea): $z(x) = C_1 + C_2 \cdot e^{-3x}$

$\lambda = 0$ è soluz. $\Rightarrow$ cerco $y(x) = Ax^2 + Bx$

$y'(x) = 2Ax + B$

$y''(x) = 2A$

$$2A + 3(2Ax + B) = x$$

$$\| $$

$$2A + 3B + 6Ax \iff \begin{cases} 6A = 1 \\ 2A + 3B = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 1/6 \\ B = -1/9 \end{cases}$$

$$\boxed{y(x) = C_1 + C_2 \cdot e^{-3x} + \frac{x^2}{6} - \frac{x}{9}}$$

(3) $f(x,y) = 3x^2y + 2xy^2 - xy + 17$

$$\begin{cases} f_x = 6xy + 2y^2 - y = y \cdot (6x + 2y - 1) \\ f_y = 3x^2 + 4xy - x = x \cdot (3x + 4y - 1) \end{cases}$$

$$\nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 1/3 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} y = 1/2 \\ x = 0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} 6x + 2y = 1 \\ 3x + 4y = 1 \end{cases}$$

sse $\begin{cases} 9x = 1 \\ 6y = 1 \end{cases}$

$\left(\frac{1}{3}, 0\right)$; $\left(0, 1/2\right)$; $(0,0)$; $\left(1/9; 1/6\right)$

$$\text{Hess} f(x,y) = \begin{bmatrix} 6y & 6x + 4y - 1 \\ 6x + 4y - 1 & 4x \end{bmatrix}$$

$\text{Hess} f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ sella

$\text{Hess} f(0, 1/2) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ sella

$\text{Hess} f\left(\frac{1}{3}, 0\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4/3 \end{bmatrix}$ sella

$\text{Hess} f\left(\frac{1}{9}, \frac{1}{6}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 \\ 1/3 & 4/9 \end{bmatrix}$ det $> 0$, Tr $> 0$, pto. min. rel.

(b) Se $f, g$ sono soluzioni di $(*)$ e

(C) $\begin{cases} f(0) = -g(0) \\ \quad e \\ f'(0) = -g'(0) \end{cases}$ allora

$f$ e $-g$ sono entrambe soluzioni di

$$(PC) \begin{cases} z'' + b(x) z' + c(x) z = 0 \\ z(0) = f(0) \\ z'(0) = f'(0) \end{cases}$$

Per il Teorema d'unicità, $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = -g(x)$, quindi $f$ e $g$ sono linearmente dipendenti

Dunque, se $f$ e $g$ sono sol. lin. ind. di $(*)$, una delle due (C) deve essere falsa. La seconda affermazione è vera.

La prima affermazione è falsa (a meno che $f$ e $g$ non siano soluzioni di qualche equazione del tipo $(*)$). P. es. $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$.

La terza affermazione è falsa. P. es.

$f(x) = e^x$ e $g(x) = e^{-x}$ soddisfano $f(0) = g(0) = 1$ e sono soluzioni di $z'' - z = 0$

La quarta affermazione è falsa. P. es.

$f(x) = x$ e $g(x) = 2x$.