Seminario di Analisi Matematica
Dipartimento di Matematica
dell'Università di Bologna

Anno Accademico 2007-08

Nicola Arcozzi

Lo spazio di Drury-Arveson: tra analisi complessa, teoria degli operatori e geometria subriemanniana.

3 aprile 2008

Abstract

In this seminar we try to explain why the Drury-Arveson space is important in operator theory, why it is interesting from the viewpoint of several complex variables, how it is related to the sub-Riemannian geometry of the Heisenberg group. We do this by following the thread of recent work in collaboration with R. Rochberg and E. Sawyer.

The *Drury-Arveson space* DA contains those functions f which are holomorphic in the unit ball $\mathbb{B}$ of $\mathbb{C}^N$ and such that

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^N} |a(n)|^2 \frac{n!}{|n|!} < \infty, \text{ where } f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}^N} a(n) z^n.$$

A measure μ on $\mathbb{B}$ is *Carleson* for DA if DA embeds boudedly in $L^2(\mu)$,

$$\imath : DA \to L^2(\mu) \text{ is bounded.}$$

We give a characterization of the Carleson measures for DA and discuss an application to multivariable operator theory.

For z in $\mathbb{B}$, let $B_z = \{w \in \mathbb{B} : \ |1 - \frac{z}{|z|} \cdot \overline{w}| \leq 2(1-|z|)\}$ be the corresponding *Koranyi region* in $\mathbb{B}$.

Theorem. *A measure μ on $\mathbb{B}$ is Carleson for DA if and only if it satisfies, for ζ in $\mathbb{B}$,*

$$\mu(B) \leq C(\mu)(1-|\zeta|),$$

and

$$\frac{1}{\mu(B_\zeta)} \int_{B_\zeta} \int_{B_\zeta} Re\left(\frac{1}{1 - z \cdot \overline{w}}\right) d\mu(w) d\mu(z) \leq C(\mu),$$

With $C(\mu)$ dependent on μ only.

Our proof relies on an analysis of the geometric features of the kernel $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-z\cdot\overline{w}}\right)$.

1. Introduzione

In questo seminario cercherò di spiegare perché lo spazio di Drury-Arveson è un oggetto importante in teoria degli operatori, in che senso sia interessante dal punto di vista dell'analisi complessa in più variabili e come sia intrecciato a dei concetti di geometria subriemanniana. Farò questo seguendo il filo di un recente lavoro in collaborazione con R. Rochberg e E. Sawyer [5], ma la stessa storia potrebbe essere narrata da punti di vista differenti.

Notazione. L'espressione $C(\mu)$ denoterà una costante positiva generica dipendente da μ e dalla dimensione dello spazio preso in considerazione. Valori diversi di $C(\mu)$ differiscono per costanti moltiplicative che dipendono dalla sola dimensione.

2. Motivazione: lo spazio di Drury-Arveson e la disuguaglianza di von Neumann multivariabile

Supponiamo di avere uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ su $\mathbb{C}$, un operatore A limitato su $\mathcal{H}$ e un polinomio $p = p(z)$ a coefficienti complessi.

Qual'è la miglior stima che possiamo dare di $|||p(A)|||$?

Riscaliamo A a una contrazione, $|||A||| \leq 1$. Nel 1951 von Neumann [21] mostrò che

$$|||p(A)||| \leq \|p\|_{H^\infty} = \sup_{|z|<1} |p(z)| \tag{1}$$

e che la stima è ottimale. Quest'ultima affermazione segue da un esempio che è, sotto molti aspetti, canonico. Consideriamo $\mathcal{H} = H^2(\mathbb{D})$, lo spazio di Hardy complesso: la funzione $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, appartiene ad $H^2(\mathbb{D})$ se è olomorfa e se

$$\|f\|_{H^2}^2 := \sup_{0\leq r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{it})|^2 dt < \infty.$$

Consideriamo ora l'operatore di moltiplicazione per z, $M_z : f \mapsto zf$, che è chiaramente una contrazione di $H^2(\mathbb{D})$. Allora, $p(M_z) = M_{p(z)}$ è l'operatore di moltiplicazione per il polinomio p,

$$p(M_z) : f \mapsto p \cdot f.$$

È evidente che $|||p(M_z)||| \leq \|p\|_{H^\infty}$ e non è difficile mostrare la disuguaglianza opposta. La disuguaglianza (1) non è dunque migliorabile.

Sia $H^\infty(\mathbb{D})$ lo spazio delle funzioni olomorfe che sono limitate in $\mathbb{D}$. La considerazione appena fatta ci dice, precisamente, che $H^\infty(\mathbb{D})$ è lo spazio dei *moltiplicatori* di $H^2(\mathbb{D})$, cioè di quelle funzioni m con la proprietà che l'operatore $f \mapsto m \cdot f$ è limitata su $H^2(\mathbb{D})$. In generale, dato uno spazio di Banach X

di funzioni, possiamo definire lo spazio dei suoi moltiplicatori, $\mathcal{M}(X)$, come lo spazio delle funzioni che moltiplicano X in sè. Abbiamo dunque che $H^\infty(\mathbb{D}) = \mathcal{M}(H^2(\mathbb{D}))$.

Uno sviluppo naturale della disuguaglianza di von Neumann è la sua estensione al caso "multi-operatore": invece di una singola contrazione A, si considera una contrazione-vettore

$$A = (A_1, \dots, A_N) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^N, \ \sum_{j=1}^N |A_j h|^2 \leq |h|^2 \ \forall h \in \mathcal{H},$$

e al posto del polinomio di una variabile se ne considera uno di N variabili complesse:

$$p(z) = p(z_1, \dots, z_n).$$

Facciamo l'ulteriore ipotesi che le componenti di A commutino tra loro, $[A_j, A_k] = 0$ per $j, k = 1, \dots, n$. Sotto queste ipotesi, S. W. Drury [1] ha dimostrato un'estensione della disuguaglianza di von Neumann. Sia $\mathbb{B} = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$ la palla unitaria di $\mathbb{C}^N$ e definiamo lo spazio di Drury-Arveson DA_N come lo spazio delle funzioni

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}^N} a_n z^n, z \in \mathbb{B},$$

[2]olomorfe e normate da

$$\|f\|_{DA}^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}^N} \frac{n!}{|n|!} |a_n|^2.$$

Allora, mostrò Drury, vale la stima

$$|||p(A)||| \leq \|p\|_{\mathcal{M}(DA)}. \tag{2}$$

Di più, la disuguaglianza è ottimale. Il caso di uguaglianza vale se $\mathcal{H} = DA$ e $A = M_z$, $M_z f = (z_1 f, \dots, z_N f)$, ma M_z non è una contrazione di DA.

Si noti che, se $N = 1$, $DA = H^2(\mathbb{D})$, quindi la disuguaglianza di von Neumann è un caso particolare di quella di Drury. D'altra parte, in dimensione superiore lo spazio di Drury è strettamente conteuto in quello che è stato definito lo *spazio di Hardy* $H^2(\mathbb{B})$:

$$\|f\|_{H^2}^2 = \sup_{0 \leq r < 1} \int_{|z|=r} |f(z)|^2 d\sigma(z),$$

dove σ è la misura di superficie.

Se $N \geq 2$, la disuguaglianza (2) ci pone il seguente problema.

Dato un polinomio p in più variabili complesse,
come possiamo stimarne la norma in $\mathcal{M}(DA)$?

---

[1] Il teorema di Drury venne ridimostrato e il suo contesto arricchito in [8].

[2] Usiamo qui l'usuale notazione a multi-indici. Se $n = (n_1, \dots, n_N) \in \mathbb{N}^N$, allora $|n| = n_1 + \dots + n_N$; $z^n = z_1^{n_1} \dots z_N^{n_N}$; $n! = n_1! \dots n_N!$.

Nel caso $N = 1$ avevamo la semplice, elegante e ottimale stima geometrica $\|p\|_{\mathcal{M}(H^2(\mathbb{D}))} = \|p\|_{H^\infty(\mathbb{D})}$. In questo seminario vedremo una stima geometrica per $\|p\|_{\mathcal{M}(DA)}$, ottimale a meno di una costante moltiplicativa dipendente dal solo N.

3. Moltiplicatori e misure di Carleson per DA

Lo spazio DA può essere pensato, per ogni N fissato, come uno spazio di Dirichlet pesato in più variabili. La caratterizzazione dei moltiplicatori per DA, allora, rientra nella classe più generale di problemi, che ha una lunga storia alle spalle, aventi a che fare con i moltiplicatori per spazi di Dirichlet pesati (l'inizio della storia è l'articolo [17]).

Se m è un intero fissato in modo che $2m + 1 - (N + 1) > -1$, allora vale la seguente equivalenza di norme, con costanti dipendenti da N e m:

$$\|f\|_{DA}^2 \approx \int_{\mathbb{B}} |(1 - |z|^2)^{m+1/2} f^{(m)}(z)|^2 \frac{dA(z)}{(1 - |z|^2)^{N+1}} + \sum_{j=0}^{m-1} |f^{(j)}(0)|^2. \tag{3}$$

Nell'equivalenza (3), $|f^{(j)}|$ è una qualsiasi ragionevole " norma della derivata complessa j-esima" della funzione f. Per esempio, $f^{(j)}$ potrebbe essere il tensore di tutte le derivate parziali j-esime. In maniera del tutto standard, se ne deduce il seguente:

Lemma 3.1. *La funzione g, olomorfa in $\mathbb{B}$, è un moltiplicatore di DA se e solo se g è limitata e se, la misura $d\mu_g$ su $\mathbb{B}$, definita da*

$$d\mu_g(z) = |(1 - |z|^2)^{m+1/2} f^{(m)}(z)|^2 \frac{dA(z)}{(1 - |z|^2)^{N+1}}, \tag{4}$$

rende vera la disuguaglianza di Sobolev pesata

$$\int_{\mathbb{B}} |f|^2 d\mu_g \le C(\mu_g)^2 \|f\|_{DA}^2.$$

Inoltre, $\|g\|_{\mathcal{M}(DA)} \approx C(\mu_g)$, dove $C(\mu_g)$ è la miglior costante per cui (4) vale.

Una misura positiva μ su $\mathbb{B}$ è *una misura di Carleson* per DA se vale la disuguaglianza

$$\int_{\mathbb{B}} |f|^2 d\mu \le C(\mu)^2 \|f\|_{DA}^2. \tag{5}$$

Il problema dei moltiplicatori è ricondotto alla caratterizzazione delle misure di Carleson per DA.

Digressione I. La caratterizzazione delle misure di Carleson per gli spazi di Dirichlet pesati ha, a sua volta, una lunga storia, che qui riporto in breve sintesi. Per $N \geq 1$ e $s \geq 0$, consideriamo lo spazio di Hilbert $\mathcal{D}_{N,s}$ delle funzioni f olomorfe in $\mathbb{B}$ per cui è finita la norma

$$\|f\|^2_{\mathcal{D}_{N,s}} = \int_{\mathbb{B}} |(1-|z|^2)^{m+s} f^{(m)}(z)|^2 \frac{dA(z)}{(1-|z|^2)^{N+1}} + \sum_{j=0}^{m-1} |f^{(j)}(0)|^2.$$

Le misure di Carleson per $\mathcal{D}_{N,s}$ hanno caratterizzazioni assai diverse per $s \geq \frac{N}{2}$ ($s = \frac{N}{2}$ corrisponde allo spazio di Hardy) e per $0 \leq s < \frac{1}{2}$. Nel primo caso, $\mathcal{D}_{N,s}$ è uno spazio di Hardy o di Bergman, e la caratterizzazione delle misure di Carleson ricalca quella ottenuta in origine da L. Carleson [9] per $H^2(\mathbb{D}) = \mathcal{D}_{1,1/2}$, che coinvolge una semplice condizione "a una scatola". Nel secondo caso, il cui prototipo è [17], che analizzò lo spazio di Dirichlet classico $\mathcal{D}_{1,0}$, condizioni di questo tipo sono necessarie, ma non sufficienti. Occorre considerare condizioni più complicate, che possono essere espresse in termini di capacità o di condizioni di tipo Kerman-Sawyer.

Nel caso di frontiera $DA_N = \mathcal{D}_{N,1/2}$, $N \geq 2$, è risaputo da tempo che le condizioni di tipo Carleson sono troppo deboli, mentre quelle capacitarie (o di tipo Kerman-Sawyer) sono troppo forti. Sono state anche studiate classi particolari di misure per cui una o l'altra condizione sono necessarie e sufficienti: in genere misure aventi supporto su sottovarietà di $\mathbb{B}$ con diverse proprietà dal punto di vista della geometria complessa.

A tempo debito preciserò i vaghi termini di questa breve digressione.

4. Il nucleo riproducente e le misure di Carleson

Lo spazio DA è dotato di un *nucleo riproducente*: per ogni ζ in $\mathbb{B}$ esiste $K_\zeta(z) = K(\zeta, z)$ tale che

$$\langle f, K_\zeta \rangle = f(\zeta)$$

ogniqualvolta f sta in DA. Gli spazi di Hilbert di funzioni con nucleo riproducente sono una famiglia vasta e importante, il cui studio sistematico risale almeno [7]. Una proprietà equivalente all'esistenza di tale nucleo è la limitatezza dei funzionali di valutazione: $\eta_\zeta : f \mapsto f(\zeta)$. Nel caso dello spazio DA, il nucleo è

$$K(\zeta, z) = \frac{1}{1 - z\overline{\zeta}}.$$

L' analisi dello spazio DA dal punto di vista del suo nucleo riproducente è condotta in dettaglio in [1] e [2]. Noi utilizzeremo qui il nucleo per ridurre il problema delle misure di Carleson a una disuguaglianza di analisi reale.

Lemma 4.1. *Definiamo l'operatore integrale T agente su funzioni misurabili in $\mathbb{B}$:*

$$Tg(\zeta) = \int_{\mathbb{B}} \Re K(\zeta, z) g(z) d\mu(z) = \int_{\mathbb{B}} \Re \left(\frac{1}{1 - \zeta \cdot \overline{z}} \right) g(z) d\mu(z). \tag{6}$$

Una misura μ su $\mathbb{B}$ è di Carleson per DA se e solo se la disuguaglianza

$$\int_{\mathbb{B}} g \; Tg d\mu \leq C(\mu)^2 \int_{\mathbb{B}} g^2 d\mu$$

vale per ogni funzione non negativa g.

Dimostrazione. La misura μ è di Carleson se e solo se l'operatore identità,

$$Id : DA \to L^2(\mu),$$

è limitato da DA a $L^2(\mu)$. Ciò equivale a chiedere che Id^*, l'aggiunto di Id, sia limitato: $Id^* : L^2(\mu) \to DA$. Calcoliamo ora $Id^* g$ esplicitamente, con g in $L^2(\mu)$ a valori complessi:

$$\begin{aligned} Id^* g(\zeta) &= \langle Id^* g, K_\zeta \rangle_{DA} = \langle g, K_\zeta \rangle_{L^2(\mu)} \\ &= \int_{\mathbb{B}} K(\zeta, z) g(z) d\mu(z). \end{aligned}$$

È elementare che Id^* sia limitato da $L^2(\mu)$ a DA se e solo se è limitato sulle funzioni g a valori reali se e solo se lo è su quelle a valori non negativi. La disuguaglianza equivalente alla condizione che μ sia di Carleson, quindi, diventa [3]

$$\begin{aligned} C(\mu)^2 \|g\|^2_{L^2(\mu)} &\geq \left\langle \int_{\mathbb{B}} K(\cdot, z) g(z) d\mu(z), \int_{\mathbb{B}} K(\cdot, w) g(z) d\mu(w) \right\rangle_{DA} \\ &= \int_{\mathbb{B}} \int_{\mathbb{B}} g(z) \overline{g(w)} \langle K_w, K_z \rangle_{DA} d\mu(z) d\mu(w) \\ &= \int_{\mathbb{B}} \int_{\mathbb{B}} g(z) \overline{g(w)} K(w, z) d\mu(z) d\mu(w) \\ &= \int_{\mathbb{B}} \int_{\mathbb{B}} g(z) \overline{g(w)} \Re K(w, z) d\mu(z) d\mu(w) \\ &= \int_{\mathbb{B}} g \; Tg d\mu, \end{aligned}$$

poiché g ha valori positivi, a maggior ragione reali. □

[3] Utilizzeremo due proprietà elementari dei nuclei riproducenti: $\langle K_w, K_z \rangle = K(w, z)$ e $K(w, z) = \overline{K(z, w)}$.

5. Il teorema di caratterizzazione.

Per ogni z ion $\mathbb{B}$, siano $z^* = \frac{z}{|z|} \in \partial\mathbb{B}$ e $B_z = \{w \in \mathbb{B} : \ |1 - z \cdot \overline{w}| \leq 2(1-|z|)\}$. Chiamiamo tutti gli insiemi del tipo B_z, $z \in \mathbb{B}$, *regioni di Carleson.* Se $B = B_z$, scriviamo anche $z = z(B)$.

Teorema 5.1. *Una misura μ è di Carleson per DA se e solo se per ogni regione di Carleson B si hanno le condizioni:*

$$\mu(B) \leq C(\mu)^2(1-|z(B)|) \tag{7}$$

e

$$\frac{1}{\mu(B)}\int_B\int_B \Re\left(\frac{1}{1-z\cdot\overline{w}}\right)d\mu(w)d\mu(z) = \frac{1}{\mu(B)}\int_B T(\chi_B)d\mu \leq C(\mu)^2. \tag{8}$$

La condizione (8) si ottiene sostituendo $g = \chi_B$ nel Lemma 6. La condizione (7) è una condizione "di tipo Carleson'.

Digressione II. Riconsideriamo gli spazi $\mathcal{D}_{N,s}$. È noto da tempo che, per $s \geq \frac{N}{2}$, le misure di Carleson sono caraterizzate dal semplice analogo di (7):

$$\mu(B) \leq C(\mu)^2(1-|z(B)|)^{2s}. \tag{9}$$

Il capostipite dei risultati di questo tipoi è il classico articolo di Carleson [9], da cui trae origine la terminologia. Nel caso in cui $\frac{1}{2} < s < \frac{N}{2}$, la caratterizzazione delle misure di Carleson è un problema tuttora aperto. Per $0 \leq s < \frac{1}{2}$, la condizione (9), pur necessaria, non è più sufficiente. Le misure di Carleson, per tali valori di s, possono essere caratterizzate da condizioni capacitarie (il prototipo è [17]), ovvero da condizioni di tipo Kerman-Sawyer (vedi, per esempio, [5] e la sua bibliografia):

$$\frac{1}{\mu(B)}\int_B \mu(B_z)^2(1-|z|^2)^{-2s}\frac{dA(z)}{(1-|z|^2)^{N+1}} \leq C(\mu)^2. \tag{10}$$

Una comparazione diretta delle condizioni capacitarie e di quelle del tipo (10) è in [6].

È noto da tempo che né (10) (troppo forte), né (7) (troppo debole) caratterizzano le misure di Carleson per $DA = \mathcal{D}_{N,1/2}$ [3]. In diversi lavori, alcune particolari sottofamiglie di misure di Carleson per DA sono state caratterizzate [4] [11][16].

In parte basandosi su risultati preliminari di [5], ma utilizzando dei metodi del tutto diversi, E. Tchoundja [20] è giunto alla sorprendente conclusione che una condizione in spirito simile a (8), in congiunzione con la condizione di tipo Carleson (9), caratterizza le misure di Carleson per $s \in [0, 1/2]$, includendo quindi lo spazio DA. La condizione di Tchoundja è

$$\frac{1}{\mu(B)}\int_B\left[\int_{B_z}\Re\left(\frac{1}{(1-z\cdot\overline{w})^{2s}}d\mu(w)\right)d\mu(w)\right]^p d\mu(z) \leq C_p(\mu)^2. \tag{11}$$

Inoltre, la condizione (11), con diversi valori di $C_p(\mu)$, è indipendente da $p \in (1, \infty)$ (per la disuguaglianza di Jensen, ci aspetteremmo che diventi più restrittiva al crescere di p).

È anche interessante notare come, per $p = 1$ e $s = 1/2$, la condizione (11) si riduca a (8). La "disuguaglianza di Hölder rovesciata" implicita nell'equivalenza di tutte queste condizioni è interessante in sè e dovrebbe contenere informazione utile sulle misure μ e sulla loro struttura.

6. Il problema appiattito e discretizzato

Uno spazio di funzioni con nucleo riproducente può essere introdotto ogni volta che abbiamo una funzione definita positiva su uno spazio X di punti. Ricordo che una funzione $K : X \times X \to \mathbb{C}$ è definita positiva se, per ogni scelta di $x_1, \dots, x_n$ in X e $c_1, \dots, c_n$ in $\mathbb{C}$, si ha

$$\sum_{l,m} c_l K(x_l, x_m)\overline{c_m} \geq 0,$$

con uguaglianza se e solo se $c_1 = \cdots = c_n = 0$. Il nucleo riproducente diventa allora $K_\zeta = K(\zeta, \cdot)$, e lo spazio di Hilbert è la chiusura di quello linearmente generato dalle funzioni K_x rispetto alla norma hilbertiana

$$\| \sum_j c_j K_{x_j} \|^2 = \sum_{l,m} c_l K(x_l, x_m)\overline{c_m}.$$

6.1. **Il dominio di Siegel...** Per meglio comprendere lo spazio DA, che è definito su $\mathbb{B}$, lo sposteremo sul *dominio di Siegel* $\mathcal{U}$. Procedero quindi a discretizzare $\mathcal{U}$, DA e il problema delle misure di Carleson. Per semplicità, porremo d'ora in poi $N = 2$. Seguiremo, con le necessarie modifiche, l'esposizione nel capitolo XII di [18].

Sia

$$\mathcal{U} = \{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : \; Imz_2 > |z_1|^2\}$$

il *dominio di Siegel* in $\mathbb{C}^2$, che è biolomorfo alla palla $\mathbb{B}$ mediante $\gamma : \mathcal{U} \to \mathbb{B}$, $\gamma(z) = w$,

$$\begin{cases} w_2 = \frac{i - z_2}{i + z_2} \\ w_1 = \frac{2iz_1}{1 + z_2}. \end{cases}$$

Definiamo ora uno spazio $DA(\mathcal{U})$ su $\mathcal{U}$, utilizzando come nucleo riproducente

$$K'(\zeta, z) = \frac{1}{r(\zeta, z)} = \frac{1}{\frac{i}{2}(\overline{\zeta_2} - z_2) - \overline{\zeta_1} z_1}. \tag{12}$$

Il nucleo K' è definito positivo, in quanto la relazione

$$K(\gamma(\zeta),\gamma(z)) = \frac{1}{4}\cdot\frac{(i+z_2)\overline{(i+\zeta_2)}}{r(\zeta,z)} = \frac{1}{4}(i+z_2)\overline{(i+\zeta_2)}K'(\zeta,z), \tag{13}$$

permette ovviamente di scaricare la proprietà da K' a K. Sia ora F una funzione in DA e si definisca $\tilde{F}:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$, $\tilde{F}(z) = 2(i+z_2)^{-1}F(\gamma(z))$. Definiamo per queste funzioni il prodotto interno

$$\langle\tilde{F},\tilde{F}\rangle_* = \langle F,G\rangle.$$

Un elementare calcolo algebrico mostra che K' è il nucleo riproducente per il prodotto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_*$. Lo spazio $DA(\mathcal{U})$ è quello contenente le funzioni $\tilde{F}$, $F\in DA$, dotato del prodotto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_*$. La mappa $F\mapsto\tilde{F}$ è un'isometria tra DA e $DA(\mathcal{U})$, estendente quella che lega $H^2(\mathbb{D})$ ad $H^2(\mathbb{R}\times(0,\infty))$.

Data una misura μ su $\mathbb{B}$, definiamo una nuova misura $\tilde{\mu}$ su $\mathcal{U}$:

$$d\tilde{\mu}(z) = |i+z_2|^2 d\mu(\gamma(z)). \tag{14}$$

Lemma 6.1. *La misura μ su $\mathbb{B}$ è di Carleson per DA se e solo se $\tilde{\mu}$ è di Carleson per $DA(\mathcal{U})$.*

Infatti:

$$\begin{aligned}\|\tilde{F}\|^2_{DA_*} &= \|F\|^2_{DA}\\ &\gtrsim \int_{\mathbb{B}}|F(w)|^2 d\mu(w) = \int_{\mathcal{U}}|F(\gamma(z))|^2 d\mu(\gamma(z))\\ &= \int_{\mathcal{U}}|\tilde{F}(z)|^2 d\tilde{\mu}(z).\end{aligned}$$

Un ragionamento del tutto analogo a quello svolto in $\mathbb{B}$ (lemma 4.1) ci porta a:

Lemma 6.2. *La misura $\tilde{\mu}$ definita in (14) è di Carleson per $DA(\mathcal{U})$ se e solo se vale la disuguaglianza*

$$\int_{\mathcal{U}} g\,\tilde{T}g d\tilde{\mu} \le C(\tilde{\mu})^2\int_{\mathcal{U}} g^2 d\tilde{\mu},$$

dove

$$\tilde{T}g(z) = \int_{\mathcal{U}}(\Re K')(z,w)g(w)d\tilde{\mu}(w).$$

6.2. **...nelle coordinate di Heisenberg.** Seguendo ancora [18], scriviamo $\mathcal{U}$ in coordinate di tipo Heisenberg.

Gli automorfismi complessi di $\mathcal{U}$ sono le *rotazioni complesse*R_a *(*$a \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$*):*

$$R_a(z_1, z_2) = (az_1, z_2);$$

le dilatazioni anisotrope δ_ρ, $\rho \geq 0$:

$$\delta_\rho(z_1, z_2) = (\rho z_1, \rho^2 z_2);$$

le *traslazioni* $[\zeta, t] \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$:

$$[\zeta, t](z_1, z_2) = (z_1 + \zeta, z_2 + t + 2iz_1\overline{\zeta} + i|\zeta|^2).$$

Le coordinate *Heisenberg* in $\overline{\mathcal{U}}$ (la chiusura di $\mathcal{U}$ in $\mathbb{C}$) sono

$$z = (z_1, z_2) = [\zeta, t, r] = [z_1, \mathrm{Re} z_2, \mathrm{Im} z_2 - |z_1|^2].$$

Il *gruppo di Heisenberg* $\mathbb{H}$ è il gruppo delle traslazioni:

$$[\zeta, t] \cdot [\xi, s] = [\zeta + \xi, t + s + 2Im(\zeta\overline{\xi})].$$

Lo zero del gruppo è $0 = [0, 0]$ e l'inverso di $[\zeta, t]$ è $[-\zeta, -t]$. La misura di Haar su $\mathbb{H}$ è $d\zeta dt$. Indicheremo con $d\beta$ la misura indotta dalla misura di Haar su $\partial\mathcal{U}$:

$$d\beta(z) = d\zeta dt.$$

Abbiamo anche che $dz = d\zeta dt dr$ è la misura di Lebesgue su $\mathcal{U}$.

Traduciamo ora la funzione $r(z, w)$ in coordinate Heisenberg.

Proposizione 6.1. *In coordinate Heisenberg,* $z = [\zeta, t, r]$, $w = [\xi, s, p]$, *abbiamo*

$$r(z, w) = \frac{i}{2}(s - t - 2Im(\zeta \cdot \overline{\xi})) + \frac{p + r + |\xi - \zeta|^2}{2},$$

che può anche essere riscritto

$$r(z, w) = \varphi_{p+r}([\xi, s]^{-1} \cdot [\zeta, t]),$$

dove

$$\varphi_r([\zeta, t]) = \frac{i}{2}t + \frac{1}{2}(r + |\zeta|^2).$$

In particolare, l' integrazione rispetto a nuclei della forma $f(r(z,w))$ può essere interpretata in termini di convoluzione in $\mathbb{H}$.

Nel caso del nucleo K' abbiamo che, se $z=[\zeta,t;r]$, $w=[\xi,s;p]$ e $[\xi,s]^{-1}\cdot[\zeta,t]=[\eta,u]$, allora $K'(z,w)=k_{p+r}([\eta,u])$,

$$k_h([\eta,u])=2\frac{h+|\eta|^2}{u^2+(h+|\eta|^2)^2}. \tag{15}$$

Abbiamo quindi una nuova maniera per riscrivere il lemma 6.2.

Lemma 6.3. *La misura $\tilde{\mu}$ è di Carleson per $DA(\mathcal{U})$ se e solo se verifica la stima*

$$\int_{\mathbb{H}\times(0,\infty)} g([\eta,u;h])\int_{\mathbb{H}\times(0,\infty)} k_{h+k}([\zeta,t]^{-1}[\eta,u])g([\zeta,t;k])d\tilde{\mu}([\zeta,t;k])d\tilde{\mu}([\eta,u;h]) \leq C(\tilde{\mu})^2\int_{\mathbb{H}\times(0,\infty)} gd\tilde{\mu}.$$

En passant, notiamo che il nucleo k è definito positivo:

$$\sum_{l,m} c_l k_{h_l+h_m}([\zeta_m,t_m]^{-1}[\zeta_l,t_l])\overline{c_m}\geq 0. \tag{16}$$

In particolare, la funzione $\kappa([\zeta,t]):=k_0([\zeta,t])$ è *definita positiva* sul gruppo $\mathbb{H}$, quindi può essere interpretata nel senso della teoria delle rappresentazioni [13]. Questo punto di vista è ancora da sviluppare.

Un'altra proprietà forse interessante di κ è che soddisfa un'equazione differenziale lineare e omogenea dall'aspetto geometrico:

$$\Delta_{\mathbb{H}}\kappa=\frac{1}{2}\frac{\partial\,\kappa}{\partial|\zeta|^2}.$$

L'operatore $\Delta_{\mathbb{H}}$ è il laplaciano "somma di quadrati" di $\mathbb{H}$: $\Delta_{\mathbb{H}}=XX+YY$. Ricordo che $X=\partial_x+2y\partial_t$ e $Y=\partial_y-2x\partial_t$ sono campi invarianti a sinistra su $\mathbb{H}$.

7. Un' interpretazione geometrica del nucleo k

Per meglio capire la geometria del nucleo k, consideriamo la sua restrizione a $\partial\mathcal{U}$ ($p=r=0$):

$$k_0([\eta,u])=2\frac{|\eta|^2}{u^2+|\eta|^4}=2\frac{|\eta|^2}{\|[\eta,u]\|^4}, \tag{17}$$

dove $\|[\eta, u]\| = (u^2 + |\eta|^4)^{1/4}$ è la *norma di Koranyi* in $\mathbb{H}$. Vediamo dunque come il nucleo K' abbia una natura ibrida. Il denominatore è la (quarta potenza della) distanza di Koranyi tra i *punti* $[\zeta, t]$ e $[\xi, s]$ in $\mathbb{H}$, mentre il numeratore è la distanza di Koranyi tra le *rette* $T_\zeta = \{[\zeta, \tau] : \tau \in \mathbb{R}\}$ e $T_\xi = \{[\xi, \sigma] : \sigma \in \mathbb{R}\}$. È noto che tali rette hanno diversi significati intrinseci in $\mathbb{H}$: dal punto di vista algebrico, sono laterali del centro di $\mathbb{H}$; da quello metrico-subriemanniano, ciascuna retta è il *cut-locus* di ogni punto appartenente ad essa. [Fig. 1]

Il dominio di Siegel $\mathbb{H} \times (0, +\infty)$ può essere geometricamente interpretato in diverse maniere. Il punto di vista che ci è più comodo è di considerare ogni foglia $\mathbb{H}(r) = \mathbb{H} \times \{r\}$ come una copia del gruppo di Heisenberg con la distanza di Koranyi $\mathbb{H} \equiv \mathbb{H} \times \{0\}$, visto alla risoluzione $r^{1/2}$.

Richiamo brevemente la *distanza di Koranyi* in $\mathbb{H}$. Dati due punti $[\zeta, t]$ e $[\xi, s]$ in $\mathbb{H}$, $d([\zeta, t], [\xi, s]) = \|[\zeta, t]^{-1}[\xi, s]\|$. La distanza di Koranyi è ovviamente invariante per traslazioni, è una distanza ed è omogenea di grado 1 rispetto alle dilatazioni.

Il nostro punto di vista, ora, è che il punto $[\zeta, t; h]$ di $\mathbb{H}(h)$ rappresenti la palla di Koranyi in $\mathbb{H}$ avente centro $[\zeta, t]$ e raggio $h^{1/2}$. Le dilatazioni ci fanno passare da una scala all'altra: $\delta_\lambda : \mathbb{H}(h) \to \mathbb{H}(\lambda^2 h)$ corrisponde a una dilatazione di λ per la distanza di Koranyi. [Fig. 2]

Fig. 1.

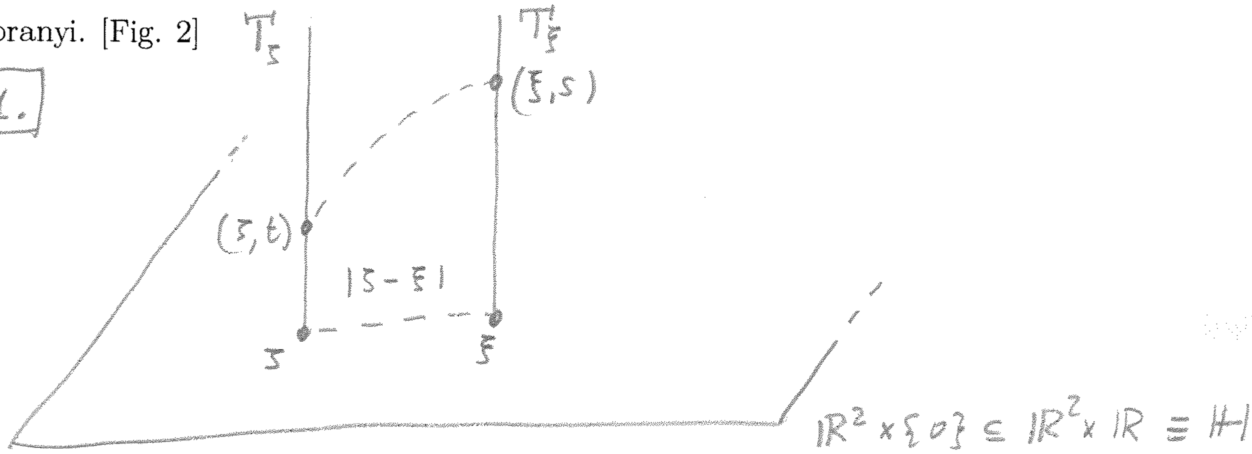
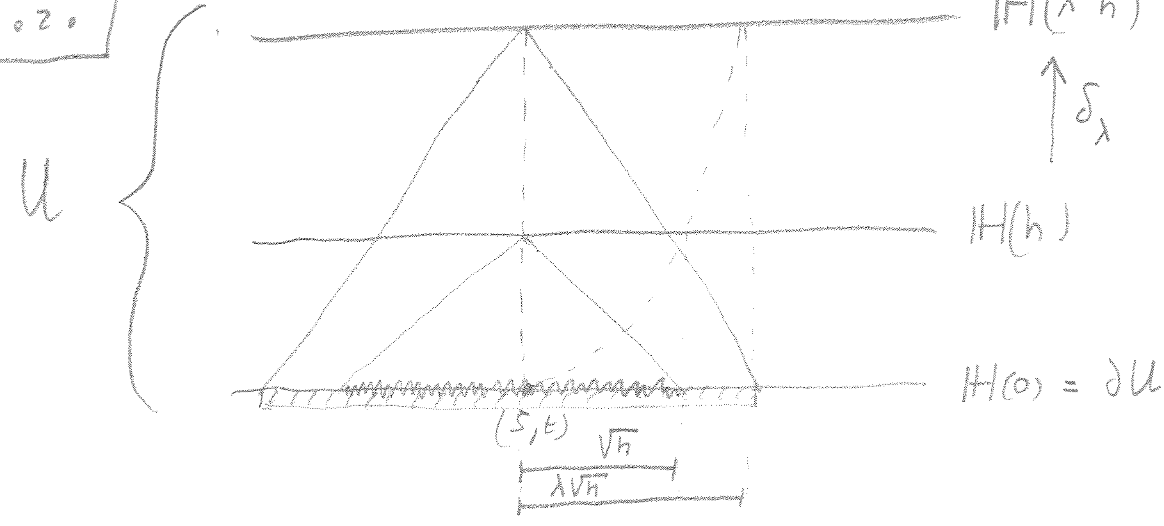


Fig. 2.



Della quantità

$$k_{h+h}([\zeta,t]^{-1}[\xi,s]) = 2\frac{h+k+|\xi-\zeta|^2}{(t-s-2\Im(\bar{\zeta}\xi))^2+(h+k+|\xi-\zeta|^2)^2}$$

consideriamo separatamente denominatore e numeratore. Il denominatore (alla 1/4) lo stimiamo

$$D \approx \max(h^{1/2}, k^{1/2}, \|[\zeta,t]^{-1}[\xi,s]\|),$$

mentre il denominatore (alla 1/2) vale

$$N \approx \max(h^{1/2}, k^{1/2}, |\xi-\zeta|).$$

Dati i due punti $[\zeta,t;h]$ e $[\xi,s;k]$, in $\mathbb{H}(h)$ e $\mathbb{H}(k)$ rispettivamente, ad essi associamo il punto $[\zeta,t;D]$. Si noti che si tratta sostanzialmente del punto $[\xi,s;D]$, poichè la risoluzione D è grande almeno quanto la distanza dei due punti, per definizione di D. [Fig. 3.1] Lo stesso discorso lo possiamo fare per le rette: a T_ζ in $\mathbb{H}(h)$ e T_ξ in $\mathbb{H}(k)$ associamo T_ζ in $\mathbb{H}(N)$. La nostra struttura quoziente $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{H}/T_0$ viene ora vista a scale diverse. La retta T_ζ in $\mathbb{H}(h)$ rappresenta il "tubo"

$$\{[\xi,s] \in \mathbb{H} : \exists t \in \mathbb{R} \ t.c. \ d([\xi,s],[\zeta,t]) \le h^{1/2}\}.$$

[Fig. 3.2]

Fig. 3.1

Caso in cui $D \approx \|[\zeta,t]^{-1}[\xi,s]\|$

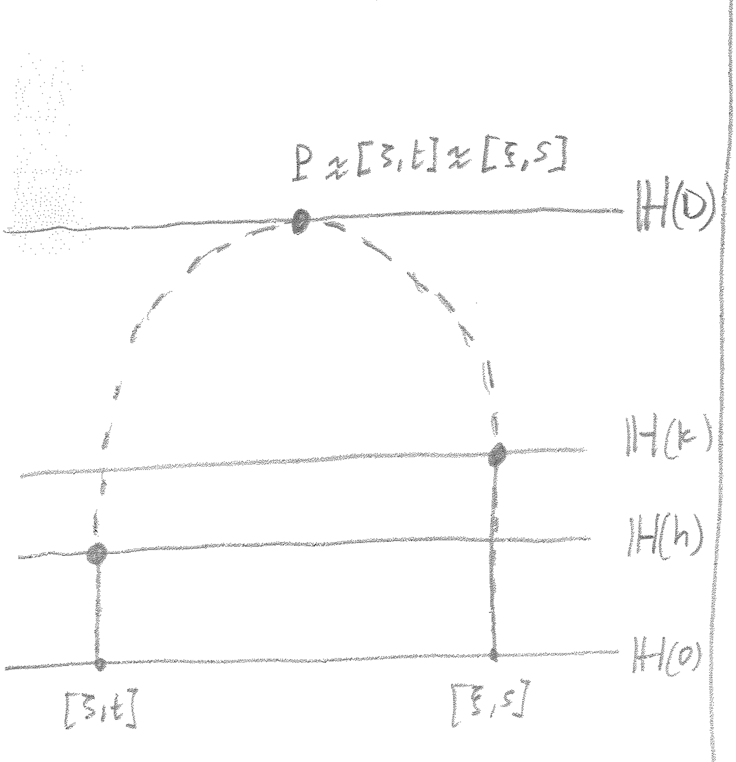
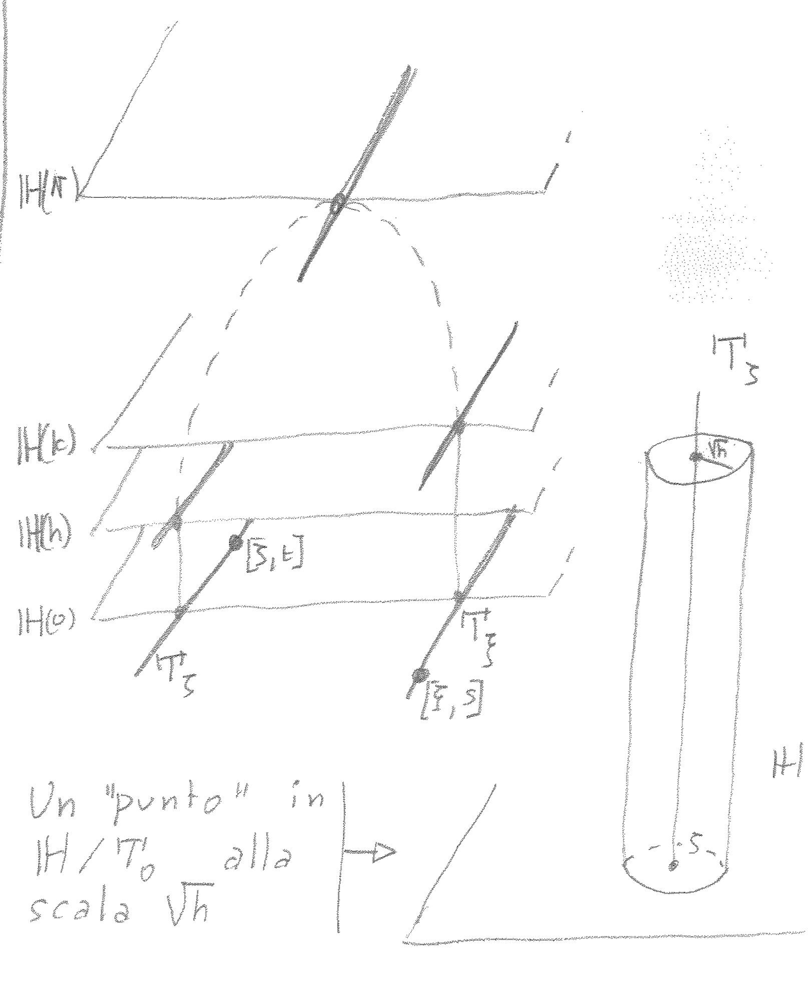


Fig. 3.2

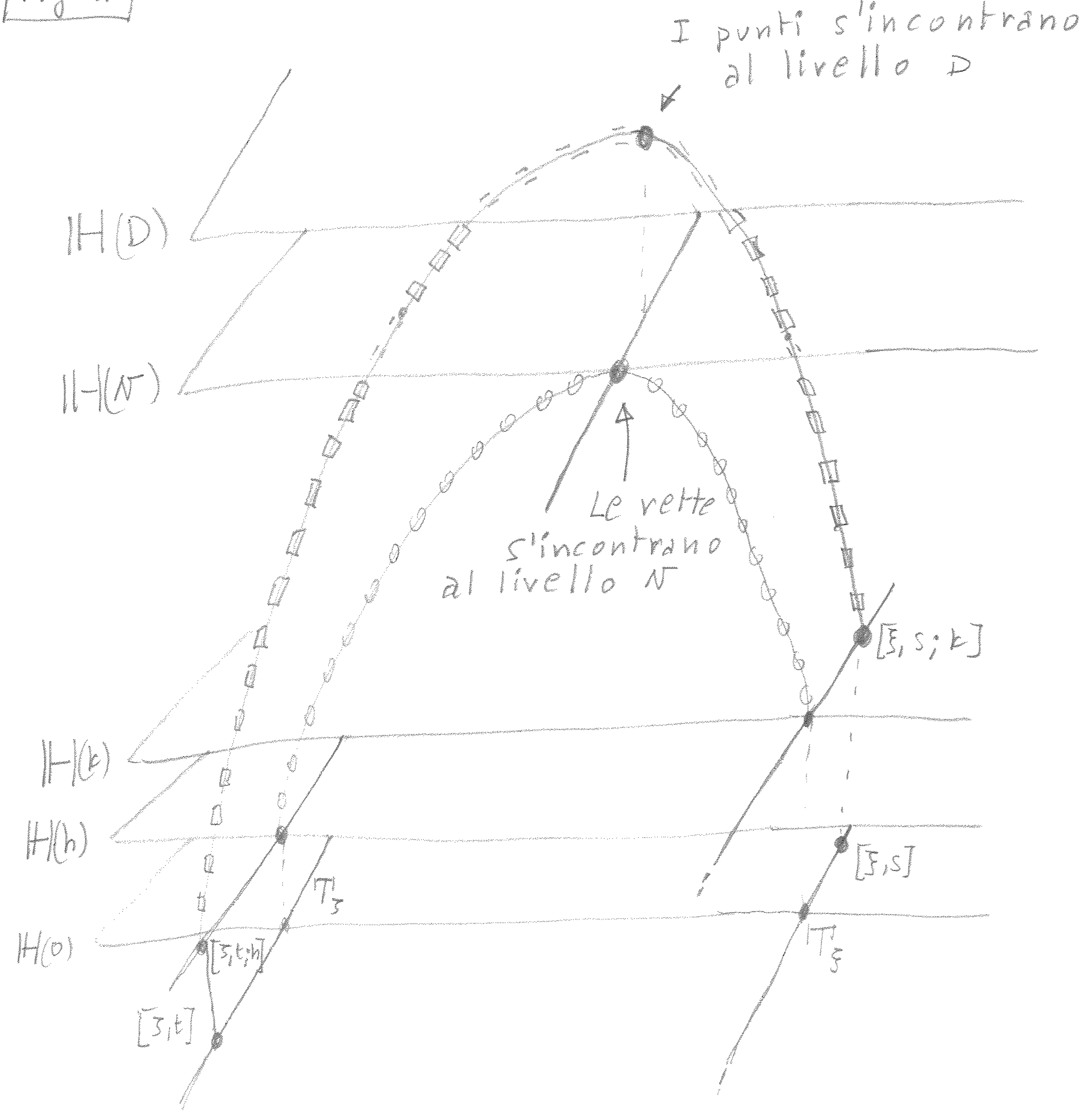
Caso in cui $N \approx |\xi-\zeta|$



Riassumendo. Il punto $[\zeta, t; D]$ in $\mathbb{H} \times (0, \infty)$ rappresenta la più piccola palla metrica in $\mathbb{H}$ (i) avente raggio non inferiore a quello delle palle metriche rappresentate da $[\zeta, t; h]$ e $[\xi, s; k]$; (ii) contenente i punti $[\zeta, t]$ e $[\xi, s]$. Il punto (ζ, N) in $\mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$ rappresenta la più piccola palla euclidea in $\mathbb{R}^2$ (i) avente raggio non inferiore a quello delle palle euclidee rappresentate da $(\zeta, h) \equiv (T_\zeta, h)$ e $(\xi, k) \equiv (T_\xi, k)$; (ii) contenente i punti ζ e ξ. Il punto $[\zeta, t; D]$ sta in $\mathbb{H}(D)$, che possiamo approssimativamente identificare con $\mathbb{H}(2^{-n})$, $n = [\log_2 D]$. Allo stesso modo, il punto (ζ, N) sta in $\mathbb{R}^2(N)$, che possiamo approssimativamente identificare con $\mathbb{R}^2(2^{-m})$, $m = [\log_2 N]$. [Fig. 4] Il nucleo vale, approssimativamente,

$$k_{h+k}([\zeta, t]^{-1}[\xi, s]) \approx 2^{2n-m}.$$

Fig. 4



7.1. **Una discretizzazione del dominio di Siegel.** Le ultime considerazioni del paragrafo precedente possono essere usate per discretizzare a diverse scale sia $\mathbb{H}$, che $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{H}/T_0$. Ciò potrebbe essere fatto in maniera assai precisa utlizzando delle piastrellature frattali di $\mathbb{H}$ [19], ma ci accontenteremo qui di dare un'idea più grossolana.

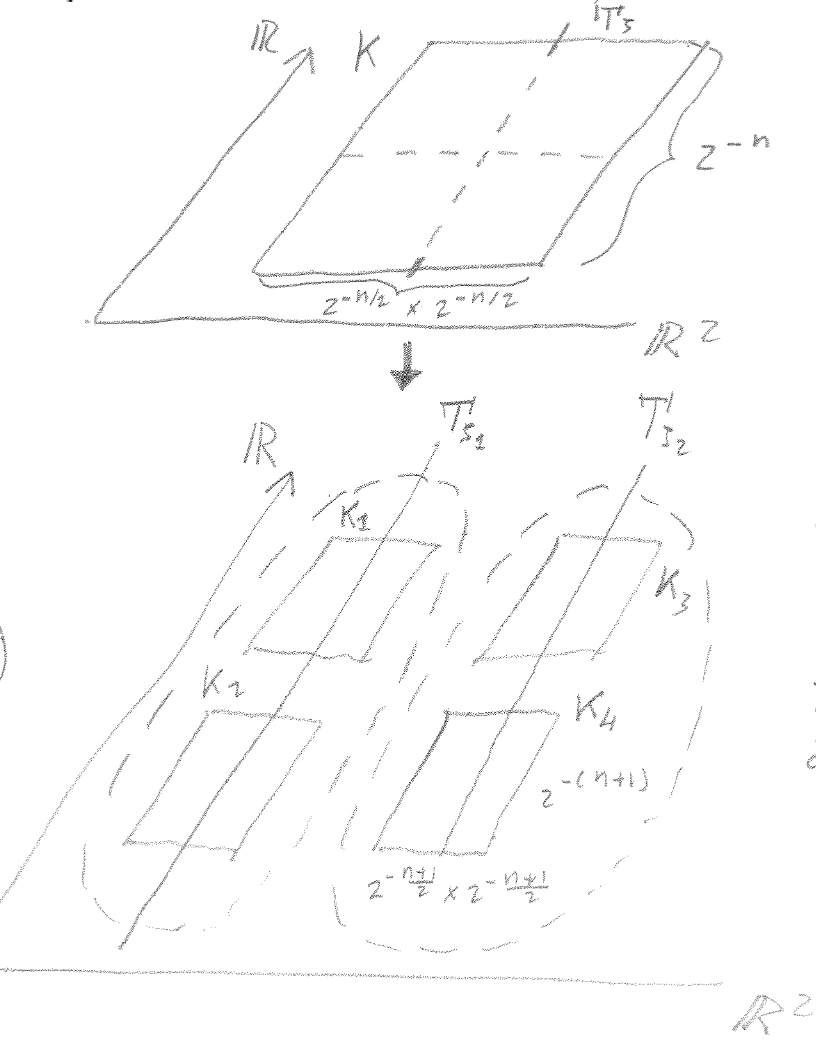
Per ogni n intero, consideriamo $\mathbb{H}(2^{-n})$ e il piano quoziente $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2(2^{-n})$. Dividiamo $\mathbb{R}^2$ in quadrati Q^n_α di lato $2^{-n/2}$ (nella maniera solita) e, per ciascun quadrato Q^n_α, dividiamo il corrispondente tubo $Q^n_\alpha \times \mathbb{R} \subset \mathbb{H}(2^{-n})$ in regioni $K^n_{\alpha,m}$ ($m \in \mathbb{Z}$), di modo che tali regioni siano approssimativamente palle metriche di raggio $2^{-n/2}$ nella metrica di Koranyi. Supponiamo per comodità che ogni quadrato Q^n_α venga diviso esattamente in quadrati Q^{n+1}_β al livello inferiore (ciò non è possibile se scegliamo dei quadrati, ovviamente!) e che ogni regione $K^n_{\alpha,m}$ sia l'unione di regioni $K^{n+1}_{\beta,l}$. Un semplice confronto di volumi mostra che (i) ogni Q^n_α a livello n si divide in *due* Q^{n+1}_β al livello inferiore e che (ii) ogni regione $K^n_{\alpha,m}$ è unione di "circa" *quattro* regioni $K^{n+1}_{\beta,l}$ al livello inferiore. Inoltre, (iii) le quattro regioni sotto $K^n_{\alpha,m}$ si dividono equamente tra i due tubi che stanno sotto Q^n_α. [Fig. 5]

Ora, con più cautela questa costruzione può essere resa esatta, ma qui ci interessa solo come guida per costruire un modello discreto di $\mathbb{H}$, di $\mathcal{U}$ e di DA.

Fig. 5

$\mathbb{H}(2^{-n})$

$\mathbb{H}(2^{-(n+1)})$



La regione K al livello 2^{-n} si divide in 4 regioni al livello $2^{-(n+1)}$, che a coppie si distribuiscono tra i due tubi in cui s'è diviso il tubo a cui apparteneva K.

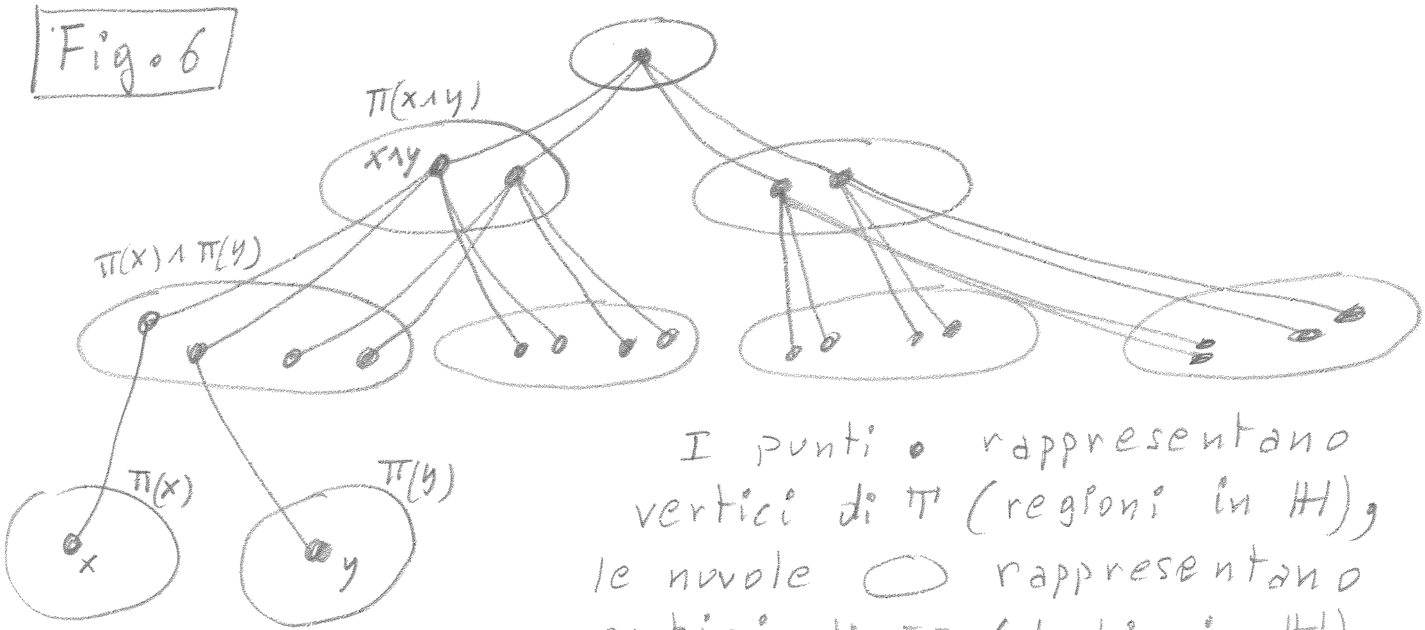
Consideriamo un *albero omogeneo* T con omogeneità 4: abbiamo un elemento o a livello $d(o) = 0$, al quale sono legati 4 elementi x_j^1 al livello $d(x_j^1) = 1$, a ciascuno dei quali sono legati 4 elementi al livello 2, e cosí via. Al livello n abbiamo 4^n elementi. Ciascun elemento x in $T \setminus \{o\}$, $d(x) = n \geq 1$, è parametrizzato da una stringa di elementi in $\mathbb{Z}_4$, il gruppo ciclico di ordine 4: $x = ox^1 \dots x^n$, con $x^j \in \mathbb{Z}_4$. Dati due punti x, y in T, $x = ox^1 \dots x^n$, $y = oy^1 \dots y^m$, con $x^1 = y^1, \dots, x^l = y^l$, ma $x^{l+1} \neq y^{l+1}$ (o $l = \min(m,n)$), indichiamo $x \wedge y = ox^1 \dots x^l$ (il percorso iniziale che x e y hanno in comune). *Gli elementi x dell'albero T modellano le palle metriche (se $d(x) = n$, allora stiamo parlando di una palla metrica di raggio 2^{-n}); se $x \wedge y$ modella la palla metrica più piccola avente raggio maggiore o uguale a quello delle palle modellate x e y, e contenente sia x che y.*

Consideriamo ora un albero omogeneo U avente omogeneità 2, i cui elementi sono parametrizzati da elementi di $\mathbb{Z}_2$ (a parte l'unico elemento a livello 0, che indichiamo ancora con o). La proiezione sul quoziente $\pi : \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_2$ induce una funzione suriettiva $\pi : T \to U$:

$$\pi(ox^1 \dots x^n) := o\pi(x^1) \dots \pi(x^n).$$

Chiaramente, $d(\pi(x)) := d(x)$ è una buona definizione di livello in U. L'operazione $\wedge : U \times U \to U$ è definita come in T. *Si noti che, in generale,* $\pi(x \wedge y) \neq \pi(x) \wedge \pi(y)$. (è invece facile verificare che $\pi(x \wedge y) \leq \pi(x) \wedge \pi(y)$, dove $z \leq w$ significa che z si trova sul cammino che, sull'albero, congiunge o a w). [Fig. 6]

Fig. 6



I punti • rappresentano vertici di T (regioni in H), le nuvole ⬭ rappresentano vertici di U (tubi in H).

Il modello discreto del nucleo di Drury-Arveson è, chiaramente:

$$h(x,y) = 2^{2d(x\wedge y)-d(\pi(x)\wedge\pi(y))}$$

Teorema 7.1. *Il nucleo h è definito positivo:*

$$\sum_{i,j=1}^{k} c_i h(x_i,x_j)\overline{c_j} \geq 0$$

per ogni scelta di $x_1,\dots,x_k$ in T e di $c_1,\dots,c_k$ in $\mathbb{C}$.

Questo teorema non è utile alla dimostrazione del Teorema 5.1 e la sua dimostrazione non segue dal fatto che il nucleo di Drury-Arveson è definito positivo. Ci permette di definire uno spazio di Hilbert di funzioni DA_d su T, che chiamiamo **spazio di Drury-Arveson discreto.** Sarebbe interessante avere per lo spazio DA_d un'interpretazione in termini di teoria degli operatori.

Sia $\mu : T \to [0,\infty)$ una misura su T. Diciamo che μ è *di Carleson per DA_d* se vale la disuguaglianza:

$$\sum_{x\in T}\left|\sum_{y\in T} h(x,y)g(y)\mu(y)\right|^2 \mu(x) \leq C(\mu)^2 \sum_{x\in T}|g(x)|^2\mu(x).$$

Si verifica in maniera standard che μ è di Carleson per DA_d se e solo se si ha l'immersione (continua) di DA_d in $L^2(\mu)$.

Dato x in T, sia $[o,x]$ l'insieme dei vertici che uno deve attraversare nel cammino più breve che, seguendo i lati di T, porta da o a x. Poniamo

$$S(x) = \{y \in T : \ x \in [o,y]\}.$$

Teorema 7.2. *La misura μ è di Carleson per DA_d se e solo se le due seguenti proprietà valgono:*

$$\mu(S(x)) \leq C(\mu)^2 2^{-d(x)}, \tag{18}$$

$$\frac{1}{\mu(S(x))}\sum_{y\in S(x)}\sum_{z\in S(x)} h(x,y)\mu(y)\mu(z) \leq C(\mu)^2. \tag{19}$$

Le condioni (18) e (19) sono i modelli discreti di (7) e (8) nel Teorema 5.1. In [5], la dimostrazione del Teorema 5.1 viene in effetti ricondotta a una variante discreta del tutto analoga al Teorema 7.2, dove T è un albero avente come vertici palle metriche approssimate aventi raggi 2^{-n}, $n \geq 0$.

Riferimenti bibliografici

[1] J. Agler and J. E. M^c Carthy, *Complete Nevanlinna-Pick kernels*, J. Funct. Anal. **175** (2000), 111-124.

[2] J. Agler and J. E. M^c Carthy, *Pick interpolation and Hilbert function spaces*, AMS 2002.

[3] P. Ahern, *Exceptional sets for holomorphic Sobolev functions*, Michigan Math. J. 35 (1988), no. 1, 29–41.

[4] P. Ahern, W. Cohn, *Exceptional sets for Hardy Sobolev functions*, $p > 1$, Indiana Univ. Math. J. 38 (1989), no. 2, 417–453.

[5] N. Arcozzi, R. Rochberg, E. Sawyer. *Carleson Measures for the Drury-Arveson Hardy space and other Besov-Sobolev spaces on Complex Balls*, Adv. Math. **218,**no. 4, (2008), p. 1107-1180.

[6] N. Arcozzi, R. Rochberg, E. Sawyer, *Capacity, Carleson measures, boundary convergence, and exceptional sets*, di prossima pubblicazione nel volume *"Perspective in Harmonic Analysis and Applications in honor of V.G. Maz'ya 70-th birthday*, della collana Proceedings of Symposia in Pure and Applied Mathematics della A.M.S. (curatori: Dorina Mitrea, Marius Mitrea).

[7] N Aronszajn, *Theory of Reproducing Kernels*, Trans. Amer. Math. Soc. **68**, (1950). 337–404.

[8] W. B. Arveson, *Subalgebras of C^*-algebras III: multivariable operator theory*, Acta Math. **181** (1998), 159-228.

[9] L. Carleson, *Interpolations by bounded analytic functions and the corona problem*, Ann. of Math. (2) **76** (1962) 547–559.

[10] Z. Chen, *Characterizations of ARveson's Hardy space*, Complex Variables **48,**(2003), 453-465.

[11] C. Cascante, J. M. Ortega, *Carleson measures on spaces of Hardy-Sobolev type*, Canad. J. Math. 47 (1995), no. 6, 1177–1200.

[12] S. W. Drury, *A generalization of von Neumann's inequality to the complex ball*, Proc. A. M. S. **68** (1978), 300-304. *A generalization of von Neumann's inequality to the complex ball*, Proc. Amer. Math. Soc. **68** (1978), no. 3, 300-304.

[13] P. Eymard, *L'algébre de Fourier d'un groupe localement compact*, Bull. Soc. Math. France 92 1964 181–236.

[14] S. G. Krantz, *Function theory of several complex variables*. Second edition. Wadsworth & Brooks/Cole, 1992.

[15] D. Marshall, C. Sundberg, *Interpolating Sequences for the Multipliers of the Dirichlet Space*, preprint (1994) scaricabile da http://www.math.washington.edu/~marshall/preprints/preprints.html.

[16] J. M. Ortega, J. Fábrega, *Pointwise multipliers and decomposition theorems in analytic Besov spaces*, Math. Z. 235 (2000), no. 1, 53–81.

[17] D. A. Stegenga, *Multipliers of the Dirichlet space*, Illinois J. Math. 24 (1980), no. 1, 113–139.

[18] E. M. Stein, *Harmonic analysis*, Princeton, NJ, 1993.

[19] R. S. Strichartz, *Self-similarity on nilpotent Lie groups*, in Geometric analysis (Philadelphia, PA, 1991), 123–157, Contemp. Math., 140, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.

[20] E. Tchoundja, *Carleson measures for the generalized Bergman spaces via a $T(1)-$Theorem*, di prossima pubblicazione su ARk. Mat.

[21] J. von Neumann, *Eine Spektraltheorie für allgemeine Operatoren eines unitren Raumes*, Math. Nachr. 4, (1951). 258–281.