Alcune disuguaglianze che vanno nel senso sbagliato, con applicazioni a spazi di martingale

Nicola Arcozzi

December 11, 2004

Abstract. In this seminar I discuss some inequalities "going in the wrong direction ", obtained in collaboration of R. Rochberg while studying Sobolev-type weighted inequalities for dyadic martingales. All these inequalities can be phrased in terms of *strongly monotone functions* on trees. One inequality says that such functions are rather resistant to cancellations. The other says that the inclusion $l^1 \subset l^\infty$ can be reversed "on average" for strongly monotone functions. Applications of these results to spaces of martingales are discussed.

Sunto. In questo seminario discuto due disuguaglianze apparentemente controintuitive, ottenute in collaborazione con R. Rochberg in un lavoro su disuguaglianze di tipo Sobolev per spazi di martingale e sulle loro applicazioni.

1 Introduzione e contesto

Esistono alcune disuguaglianze che "vanno nel senso giusto", come la disuguaglianza di Hölder, che segue dalla convessità di t^p, $p > 1$. La disuguaglianza di Hölder inversa, invece, come dice il nome, "va nel senso sbagliato" (ma è vera!). [1] Per dirla con una metafora giornalistica, le disuguaglianze che vanno nel senso sbagliato sono l'uomo che morde il cane: a volte mordere il cane è facile, ma in ogni caso il cane un pò si stupisce.

In questo seminario presento due disuguaglianze discrete "che vanno nel senso sbagliato", estratte da un lavoro in collaborazione con Richard Rochberg [AR]. La prima dice che alcune cancellazioni apparentemente fuori controllo sono, al contrario, innocue, mentre la seconda dice che a volte, in media, possiamo invertire l'ovvia inclusione $l^1 \subseteq l^\infty$. Entrambe le disuguaglianze si possono dimostrare con semplici argomenti a base di tempi d'arresto, utilizzando una versione dell'inclusione $l^1 \subset l^p$ $(p > 1)$ un pò più precisa di quella solita.

Il contesto che motiva le disuguaglianze è il seguente. In generale, è interessante caratterizzare le misure μ per cui vale la disuguaglianza di Sobolev pesata

$$\int_X |f|^p d\mu \leq C(\mu) \int_X |\delta f|^p d\lambda \tag{1}$$

dove (X, λ) è uno spazio di misura dato e δ è una qualche definizione di derivata, magari in senso molto generalizzato. Qui e nel seguito, $p \in (1, \infty)$ e p' è il suo coniugato, $1/p + 1/p' = 1$. In realtà, in genere (1) diventa più trattabile quando si trasforma in

$$\int_X |Kg|^p d\mu \leq C(\mu) \int_X |g|^p d\lambda \tag{2}$$

dove $Kg(x) = \int_X K(x,y)g(y)d\lambda(y)$ e K è un nucleo integrale con buone proprietà. Su questo tipo di disuguaglianze, e sulle loro applicazioni, c'e' una vastissima letteratura, da cui estraggo solo alcuni lavori recenti e di portata generale [KV], [SWZ].

In genere, al fine di caratterizzare le misure μ per cui (1) vale, occorre considerare anche la disuguaglianza duale a (2),

$$\int_X |K^* g|^{p'} d\mu \leq C(\mu) \int_X |g|^{p'} d\lambda, \tag{3}$$

dove K^* è l'aggiunto di K. Un pregio di K^* è che si tratta generalmente di un operatore con nucleo positivo, o comunque con proprietà simili alla positività.

---

[1] La disuguaglianza di Hölder inversa dice che, se ω è un peso in A_∞ su $\mathbb{R}^n$, allora esiste un $r > 1$ tale che, per ogni palla B,

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B \omega^r dx \right)^{1/r} \leq \frac{c}{|B|} \int_B \omega dx$$

(qui $|F|$ è la misura di Lebesgue di B). Un peso A_∞, ricordo, è una funzione positiva ω tale che, per costanti $\alpha, \beta \in (0,1)$, si ha che, se F è misurabile ed è contenuto in una palla B, e $|F| \geq \alpha|B|$, allora $\omega(F) \geq \beta|B|$.

Una variazione sul tema di queste disuguaglianze è quella in cui si richiede che (1) valga solo per funzioni f che soddisfano delle condizioni tipo "valor medio". Per esempio, quando X è la palla unitaria in $\mathbb{C}^n$, $d\lambda(z) = (1-|z|^2)^{-(n+1)}dA(z)$ è la misura invariante per biolomorfismi, f è olomorfa e $\delta f(z) = (1-|z|^2)^m R^m f(z)$ è la derivata invariante[2] $(mp > n)$, dove $Rf = \sum z_j \frac{\partial f}{\partial z_j}$ è la derivata complessa radiale. Vedi [Ste], [KS], [V], [Wu], [Wang], [ARS] per $n = 1$, con condizioni diverse, di tipo capacitario e non, e con diversa generalità. Il caso $n > 1$ è trattato in un lavoro in corso di stesura con R. Rochberg e E. Sawyer. Anche nel caso in cui si voglia caratterizzare (1) per funzioni olomorfe o armoniche, conviene passare alla disuguaglianza duale (3), ma questa volta l'operatore aggiunto K^* è diverso, diversi essendo gli spazi di funzioni considerati. A volte, come vedremo nel prossimo paragrafo, K^* ha un nucleo pieno di cancellazioni. La sua analisi, quindi, richiede un sovrappiù di sottigliezza.

2 Spazi di Dirichlet discreti formati da martingale.

Per raccontare le diversità che l'introduzione di una struttura per f (p.es., l'olomorfia) introduce nel problema, utilizzerò un esempio discreto, peraltro legato al caso olomorfo in più modi. Sia T un albero (cioè, un grafo connesso e semplicemente connesso), con un punto fissato o (la *radice*), rispetto a cui T viene parzialmente ordinato: se $x, y \in T$, allora $x \leq y$ se e solo se x sta nel cammino $[o, y]$ tra o e y.[3] La distanza tra due punti x e y di T, $d(x, y)$, è il numero minimo di lati da percorrere andando da x a y. Nel seguito, $|x| = d(x, o)$. Se $x \neq o$ sta in T, allora x^{-1} denota il *genitore* di x: $x^{-1} < x$ e $d(x, x^{-1}) = 1$. Se F è una funzione su T, la sua *derivata* è ovviamente la differenza,

$$DF(x) = F(x) - F(x^{-1})$$

se $x \neq o$, mentre per comodità poniamo $DF(o) = F(o)$. L'operatore inverso di D (l'equivalente del K di cui sopra) è I,

$$If(x) = \sum_{y=o}^{x} f(y)$$

Abbiamo, infatti, $ID = DI = Id$, l'identità.

Qui considero solo l'*albero binario*, in cui o è vertice di due lati e ogni altro punto di T è vertice di tre lati. Denotiamo con x_+ e x_- i *figli* di x, cioè, i suoi due immediati successori (l'attribuzione dei segni $\pm$ è indifferente). Ci verrà utile dare un nome all'operatore che scambia i figli tra loro: $-(\pm x) = \mp x$.

[2]A dire il vero, questa derivata è solo "quasi-invariante" per $n \neq 1$.

[3]Mi affido all'intuizione di chi ascolta, e non darò troppe definizioni formali. Il cammino tra o e y, per esempio, potrebbe essere definito come i vertici sulla sequenza di lati dell'albero che va da o a y, senza mai tornare su se stessa.

Consideriamo su T funzioni con la struttura più semplice, le martingale. $H : T \to \mathbb{R}$ è una *martingala* se soddisfa la relazione

$$H(x) = \frac{H(x_+) + H(x_-)}{2}$$

Le martingale modellano il *gioco equo* in probabilità (l'equità si riflette nel valor medio), ma qui ci interessano solo come caricatura delle funzioni olomorfe o armoniche. Dò il nome $MB_{a,p}$ allo spazio delle martingale H per cui

$$\|H\|^p_{B_{a,p}} = \|DH\|^p_{a,p} = \sum_{x \in T} |DH(x)|^p 2^{-a|x|} < \infty$$

dove $a \in [0,1]$ in questo seminario. Lo spazio $MB_{a,p}$ è contenuto in $B_{a,p}$, lo spazio definito dalla norma $\|\cdot\|_{B_{a,p}}$, senza imporre condizioni di tipo algebrico a H.

Vediamo in questo esempio le disuguaglianze pesate senza e con struttura. Supponiamo di voler caratterizzare le misure μ su T tali che

$$\sum_{x \in T} |F(x)|^p \mu(x) \leq C(\mu) \sum_{x \in T} |DF(x)|^p 2^{-a|x|} \tag{4}$$

Dopo aver sostituito $DF = f$, (4) diventa

$$\sum_{x \in T} |If(x)|^p \mu(x) \leq C(\mu) \sum_{x \in T} |f(x)|^p 2^{-a|x|} \tag{5}$$

Sarà comodo introdurre la *scatola di Carleson* con vertice in x, $S(x) = \{y \in T : y \geq x\}$. Per la dualità degli spazi $(L^p(\mu), L^{p'}(\mu))$ (prodotto in $L^2(\mu)$) e $(L^p(2^{-a|x|}), L^{p'}(2^{a(p'-1)|x|}))$ (prodotto interno in $l^2 = l^2(T)$, il solito l-piccolo 2), (5) diventa

$$\sum_{x \in T} |I^*(\mu g)(x)|^{p'} 2^{a(p'-1)|x|} \leq C(\mu) \sum_{x \in T} |g(x)|^{p'} \mu(x) \tag{6}$$

dove $I^*(\mu\ \cdot)$ è l'aggiunto di I, che può essere calcolato scambiando due somme,

$$I^*(\mu g)(x) = \sum_{y \in S(x)} g(y)\mu(y)$$

Alla ricerca di condizioni sotto cui valga (5) $\Longleftrightarrow$ (6), facciamo un test su (6) utilizzando funzioni del tipo $g = \chi_{S(z)}$, $z \in T$. Otteniamo una condizione *necessaria.*

Lemma 1 *Se la disuguaglianza (5) vale, allora, per ogni z in T,*

$$\sum_{y \in S(z)} \mu(S(y))^{p'} 2^{a(p'-1)|y|} \leq C(\mu)\mu(S(z)) \tag{7}$$

In [ARS] è dimostrato, in una situazione più generale, che (7) è anche sufficiente affinchè (5) valga.

Teorema 2 *(7) e (5) sono equivalenti per* $1 < p < \infty$ *e* $a \in \mathbb{R}$.

Vediamo ora cosa succede quando chiediamo che (4) valga solo per martingale. Chiaramente, la condizione (7) sarà a maggior ragione sufficiente. È anche necessaria?

La prima sorpresa, brutta, è che la condizione non è necessaria per $a = 1$ e $p = 2$ (ma vedremo in §3 che ciò vale anche per $a = 1$, $p \in (1, \infty)$). Infatti, si può mostrare con serie di Fourier (in questo contesto, con funzioni di Haar) che $MB_{1,2} = H^2$ è lo spazio H^2 delle martingale, ed è noto (riproducendo in forma semplificata un famoso teorema di Carleson [Car]) , che le misure μ per cui $Id : H^2 \to L^2(\mu)$ sono tutte e sole quelle per cui

$$\mu(S(z)) \leq C(\mu) 2^{-|z|} \tag{8}$$

([Long], ma vedi anche [NT] per una dimostrazione breve e divertente, basata sulla nuova tecnologia delle "funzioni di Bellman") così come è noto che la condizione (8) è *strettamente più debole* della condizione (7) con $a = 1$ e $p = 2$ (qualunque $p \in (1, \infty)$, infatti [ARS]). Cercheremo di capire meglio cos' è andato storto in §4.

Nel resto del paragrafo, assumeremo che $0 \leq a < 1$ e che $1 < p < \infty$. Vedremo in Teorema 4 che la caratterizzazione delle misure μ per cui (5) vale è la stessa sia che si considerino spazi di successioni senza struttura, che spazi di martingale.

Cerchiamo di usare un argomento di uso comune a base di aggiunti. Supponiamo che valga, per ogni martingala H,

$$\sum_{x \in T} |H(x)|^p \mu(x) \leq C(\mu) \sum_{x \in T} |DH(x)|^p 2^{-a|x|} \tag{9}$$

Astrattamente, questo significa che l'identità Id immerge $MB_{a,p}$ in $L^p(\mu)$,

$$Id : MB_{a,p} \to L^p(\mu)$$

Diamo per scontato che, per $a \in [0, 1]$, $(MB_{a,p}, MB_{a(1-p'),p'})$ sia una coppia di spazi duali rispetto al prodotto in B_2 (di cui MB_2 è sottospazio),

$$< H, K >_{B_2} = \sum_x DH(x) \overline{DK(x)}$$

(questo fatto è vero e facile da dimostrare, e non ha equivalenti, per $a = 1$, nel caso olomorfo). Possiamo allora calcolare "a mano" l'aggiunto $\Theta = Id^*$ di Id rispetto a queste coppie duali, sapendo che (9) diventerà, in forma astratta,

$$\Theta : L^{p'}(\mu) \to MB_{a(1-p'),p'} \tag{10}$$

(Il vantaggio, qui, è che lo spazio su cui è definita Θ contiene funzioni "destrutturate", più flessibili delle martingale). Utilizziamo il fatto che MB_2 è dotato di *nucleo riproducente.* Cioè, per ogni punto $x \in T$ c'è una martingala H_x con la proprietà che

$$< H_x, H >_{B_2} = H(x)$$

per ogni martingala H in MB_2. Possiamo finalmente calcolare l'aggiunto di Id, del tutto astrattamente:

$$\begin{aligned}\Theta g(x) &= < \Theta g, H_x >_{B_2} \\ &= < g, IdH_x >_{L^2(\mu)} = < g, H_x >_{L^2(\mu)} \\ &= \sum_y g(y)\overline{H}_x(y)\mu(y)\end{aligned}$$

Vestendo ora (10) nei concreti panni di una disuguaglianza valida per ogni $g \in L^{p'}(\mu)$, otteniamo

$$\begin{aligned}\sum_x |\sum_y g(y) D_x H_x(y)\mu(y)|^{p'} 2^{a(p'-1)|x|} &= \\ \sum_x |\sum_y (H_x(y) - H_{x^{-1}}(y))g(y)\mu(y)|^{p'} 2^{a(p'-1)|x|} & \\ \leq C(\mu) \sum_x |g(x)|^{p'} \mu(x) &\end{aligned}$$

È facile calcolare l'espressione esplicita di $D_x H_x = H_x - H_{x^{-1}}$ (dove D_x è la differenze nella variabile x), per $x \neq o$,

$$H_x(y) - H_{x^{-1}}(y) = \begin{cases} 1/2 & \text{if } y \geq x \\ -1/2 & \text{if } y \geq -x \end{cases}$$

La disequazione per Θ ristretta a funzioni del tipo $g = \chi_{S(z)}$ diventa, allora,

$$\mu(S(z))^{p'} 2^{a(p'-1)|z|} + \sum_{x>z} |\mu(S(x)) - \mu(S(-x))|^{p'} 2^{a(p'-1)|x|} \leq C(\mu)\mu(S(x)) \quad (11)$$

dove il primo termine, l'unico a priori sostanzioso, è quello che si ottiene ponendo $x = z$. La condizione (7) si otterrebbe sostituendo $-$ con $+$ dentro il valore assoluto. Questo non può esser fatto a cuor leggero, poichè le cancellazioni sulla sinistra di (11) sono potenzialmente distruttive. Si pensi al caso di una μ radiale, $\mu(z) = \varphi(|z|)$, in cui tutti i termini della sommatoria a sinistra si azzerano.

Nel prossimo paragrafo mostriamo il seguente

Lemma 3 *Se $0 \leq a < 1$ e $1 < p < \infty$, allora esiste $C = C(a,p)$ tale che*

$$\begin{aligned}\sum_{y \in S(z)} \mu(S(y))^{p'} 2^{a(p'-1)|y|} \leq \mu(S(z))^{p'} 2^{a(p'-1)|z|} & \\ + \sum_{x>z} |\mu(S(x)) - \mu(S(-x))|^{p'} 2^{a(p'-1)|x|} &\end{aligned}$$

Come conseguenza, in virtù della discussione precedente abbiamo il seguente teorema.

Teorema 4 *Se $0 \leq a < 1$ e $1 < p < \infty$, allora le due seguenti affermazioni sono equivalenti per una misura μ su T.*

(i) $Id : MB_{a,p} \to L^p(\mu)$;

(ii) *esiste* $C = C(\mu)$ *tale che* $\sum_{y \in S(z)} \mu(S(y))^{p'} 2^{a(p'-1)|y|} \leq C(\mu)\mu(S(z))$ *per ogni* z *in* T.

Lemma 3 è falso per $p = 1$. Questo sembra escludere che lo si possa dimostrare utilizzando solamente la disuguaglianza triangolare in maniera accorta, come si potrebbe pensare.

3 A volte le cancellazioni non contano

In questo paragrafo dimostro una generalizzazione del lemma 3. Lemma 3 è dimostrato in [AR], mentre la generalizzazione che presento qui è nuova e la dimostrazione è leggermente differente.

Sia T un albero con distanza d e radice o. Dato $z \in T$, sia $C(z) = \{w \in T : w > z, \ d(z, w) = 1\}$ l'insieme dei figli di z. Una funzione $M : T \to [0, \infty)$ è *fortemente monotona* se $\sum_{w \in C(z)} M_w \leq M_z$. Per esempio, se μ è una misura positiva su T, allora $M_z = \mu(S(z))$ è una funzione fortemente monotona. Sia dato su T un peso positivo λ tale che $\lambda(o) = 1$ e

$$\lambda(z) \leq k\lambda(z^{-1}) \tag{12}$$

Sia ora $v : T \to \mathbb{C}$ una qualsiasi funzione tale che

$$\|v\|_\infty \leq A < \infty, \ \inf_{z \in T} |v(z)| \geq a > 0 \tag{13}$$

Formiamo ora due operatori che agiscono sulle funzioni M strettamente monotone,

$$HM(z) = \sum_{w \in C(z)} v(w) M_w \tag{14}$$

$$KM(z) = \sum_{w \in C(z)} M_w \tag{15}$$

Introduciamo ora la funzione

$$f(t) = t^q + (1-t)^q, \ 0 \leq t \leq 1 \tag{16}$$

Teorema 5 *Sia $q > 1$ e supponiamo che k soddisfi la condizione*

$$kf\left(\frac{A}{a + A}\right) < 1 \tag{17}$$

Allora, esiste C_1 dipendente solo da a, A, k e q tale che

$$\sum_{z\in T} |KM(z)|^q \lambda(z) + M_o^q \leq C_1 \left(\sum_{z\in T} |HM(z)|^q \lambda(z) + M_o^q \right) \tag{18}$$

Corollario 6 *Con le stesse ipotesi, abbiamo*

$$\sum_{z\in T} M(z)^q \lambda(z) \leq C_3 \left(\sum_{z\in T} |HM(z)|^q \lambda(z) + M_o^q \right) \tag{19}$$

Prima di dimostrare il teorema, vediamo come lemma 3 sia un suo caso particolare. Innanzitutto, poniamo $p' = q$. Assumiamo che T sia l'albero diadico del paragrafo precedente e notiamo come le funzioni $M_z = \mu(S(z))$ siano fortemente monotone su T. Infatti, "quasi" ogni funzione strattamente monotona M si può scrivere nella forma $M_z = \mu(S(z))$ per qualche $\mu \geq 0$ (per rimuovere il "quasi" occorrerebbe permettere che il supporto di μ possa estendersi al *bordo* dell'albero, ovvero alla sua frontiera di Martin). La funzione v è quella che vale ± 1 su $z_\pm$, quindi $a = A = 1$, mentre il peso λ è quello definito da $\lambda(x) = 2^{a(q-1)|x|}$ (c'è uno sfortunato caso di omonimia con la a nell'enunciato del teorema), per cui $k = 2^{a(q-1)}$. La condizione 17, allora, diventa

$$1 > 2^{a(q-1)} f(1/2) = 2^{a(q-1)-(q-1)}$$

cioè, $a < 1$ (questo, tra l'altro, mostra che l'ipotesi (17) non può essere migliorata sostituendo $<$ con $\leq$). La conclusione del corollario 6 è proprio quanto affermato in lemma 3.

La dimostrazione del teorema si basa sul seguente lemma, che quantifica quanto si può guadagnare nella disuguaglianza corrispondente all'inclusione $l^p \subset l^1$ quando intervengono delle cancellazioni.

Lemma 7 *Sia $q > 1$ e sia $\phi = \{\phi_j\}$ una successione in $\mathbb{C}$ tale che*

$$0 < a \leq \inf |\phi_j| \leq \sup |\phi_j| \leq A < \infty$$

Sia $0 < \delta < a$. Allora, se $\{x_j\}$ è una successione di numeri non negativi tali che $\sum_j x_j = 1$, e se

$$\left| \sum_j \phi_j x_j \right| \leq \delta, \tag{20}$$

allora

$$\sum_j x_j^q \leq f\left(\frac{\delta + A}{a + A}\right) < 1 \tag{21}$$

Dimostrazione del teorema. Sia $0 < \delta < a$ tale che

$$kf\left(\frac{\delta + A}{a + A}\right) < 1$$

(questo è possibile se δ è abbastanza piccolo, per (17)). Consideriamo gli insiemi $B = \{w \in T : |HM(w)| \leq \delta |KM(w)|\}$ (cattivo per la disuguaglianza (18)) e $G = \{w \in T : |HM(w)| > \delta |KM(w)|\}$ (buono per (18)).

Su G c'è ben poco da dire, poichè

$$\sum_{z \in G} |KM(z)|^q \lambda(z) \leq \delta^{-q} \sum_{z \in G} |HM(z)|^q \lambda(z)$$

Vediamo ora B. B si scompone in componenti connesse B_α (dove "connesso" si riferisce all'ovvia geometria dell'albero T) e ogni componente connessa B_α ha un'unico punto minimo w_α ($w_\alpha \leq z$, ogniqualvolta $z \in B_\alpha$). O $w_\alpha = o$ (e questo può succedere al massimo per un valore di α, diciamo α_o), o il padre di w_α, w_α^{-1}, è un punto in G.

Mostreremo le seguenti stime.

(i) Per ogni componente B_α,

$$\sum_{w \in B_\alpha} |KM(w)|^q \lambda(w) \leq C_2(q, a, A) |KM(w_\alpha)|^q \lambda(w_\alpha) \tag{22}$$

(ii) Se $z \in G$, allora

$$\sum_{w \in C(z)} |KM(w)|^q \lambda(w) \leq C_4 |KM(z)|^q \lambda(z) \tag{23}$$

(i) e (ii) implicano che

$$\begin{aligned}
\sum_{w \in B} |KM(w)|^q \lambda(w) &= \sum_{w \in B_{\alpha_o}} |KM(w)|^q \lambda(w) + \sum_{\alpha \neq \alpha_o} \sum_{w \in B_\alpha} |KM(w)|^q \lambda(w) \\
&\leq C_2 \left(M_o^q + \sum_{\alpha \neq \alpha_o} |KM(w_\alpha)|^q \lambda(w_\alpha) \right) \\
&= C_2 \left(M_o^q + \sum_{z \in G} \sum_{\alpha:\ w_\alpha^{-1} = z} |KM(w_\alpha)|^q \lambda(w_\alpha) \right) \\
&\leq C_5 \left(M_o^q + \sum_{z \in G} |KM(z)|^q \lambda(z) \right) \\
&\leq C_5 \delta^{-q} \left(M_o^q + \sum_{z \in G} |HM(z)|^q \lambda(z) \right)
\end{aligned}$$

e il teorema segue.

Ora, (ii) segue banalmente dal fatto che M è fortemente monotona,

$$\begin{aligned}
\sum_{w\in C(z)} |KM(w)|^q\lambda(w) &\leq k\lambda(z)\sum_{w\in C(z)}\left|\sum_{\xi\in C(w)} M_\xi\right|^q \\
&\leq k\lambda(z)\left|\sum_{w\in C(z)}\sum_{\xi\in C(w)} M_\xi\right|^q \\
&\leq k\lambda(z)|KM(z)|^q
\end{aligned}$$

La dimostrazione di (i) è un argomento a base di serie geometriche. Sia $B_{\alpha,n}$ l'insieme dei punti in B_α che hanno distanza $n \geq 1$ da w_α. Se ξ sta in $B_{\alpha,n-1}$

$$|\sum_{w\in C(\xi)} v(w)M_w| = |HM(\xi)| \leq \delta|KM(\xi)| = \delta\sum_{w\in C(\xi)} M_w,$$

Allora, per il lemma 7, abbiamo

$$\begin{aligned}
\sum_{w\in C(\xi)} |KM(w)|^q\lambda(w) &\leq k\lambda(\xi)\sum_{w\in C(\xi)} |KM(w)|^q \\
&\leq k\lambda(\xi)\sum_{w\in C(\xi)} M_w^q \\
&\leq kf\left(\frac{\delta+A}{a+A}\right)\lambda(\xi)(\sum_{w\in C(\xi)} M_w)^q \\
&= (1-\eta)KM(\xi)^q\lambda(\xi)
\end{aligned}$$

per qualche $\eta > 0$, in virtù di (17). In particolare,

$$\sum_{w\in C(\xi)\cap B} |KM(w)|^q\lambda(w) \leq (1-\eta)KM(\xi)^q\lambda(\xi) \tag{24}$$

Sommando la disuguaglianza (24) su tutti i $w \in B_{\alpha,n}$,

$$\sum_{w\in B_{\alpha,n}} |KM(w)|^q\lambda(w) \leq (1-\eta)\sum_{\xi\in B_{\alpha,n-1}} |KM(\xi)|^q\lambda(\xi)$$

Iterando e sommando rispetto a n, otteniamo (i). ///

La dimostrazione del lemma (7) è divisa in lemmi più elementari.

Lemma 8 *Sia $\phi = \{\phi_j\}$ una successione in $\mathbb{C}$ tale che*

$$0 < a \leq \inf|\phi_j| \leq \sup|\phi_j| \leq A < \infty$$

e sia $0 < \delta < a$. Allora, se $\{x_j\}$ è una successione di numeri non negativi e $\sum_j x_j = 1$, e se

$$\left|\sum_j \phi_j x_j\right| \leq \delta, \tag{25}$$

allora

$$\sup_j x_j \leq \frac{\delta + A}{a + A} < 1 \tag{26}$$

Dimostrazione. Per la disuguaglianza triangolare e l'ipotesi su k,

$$\delta \geq \left| \sum_j \phi_j x_j \right| \geq |\phi_k| x_k - \sum_{j \neq k} |\phi_j| x_j$$

$$\geq a x_k - A(1 - x_k)$$

quindi,

$$x_k \leq \frac{\delta + A}{a + A} < 1$$

se scegliamo $\delta < a$. ////

Lemma 9 *Per ogni $q > 1$ e $K \in [1/2, 1)$, se $\{x_n\}$ è una successione di numeri non negativi tali che $\sum_n x_n = 1$ e $x_j \leq K$, allora*

$$\sum_n x_n^q \leq f(K)$$

La costante $f(K)$ è la migliore possibile.

Dimostrazione. Senza perdere in generalità, supponiamo che la successione $\{x_n\}$ sia non decrescente e definitivamente nulla (il caso generale segue per approssimazione). Sia $f(t) = t^q + (1-t)^q$, $0 \leq t \leq 1$. Allora f è simmetrica con centro $1/2$ e strettamente decrescente in $[0, 1/2]$.

Il problema è quello di massimizzare $F = \sum_{n=1}^N x_n^q$ con i vincoli $G = \sum_{n=1}^N x_j = 1$ e $0 \leq x_n \leq K$, $N \geq 2$ (poichè $K < 1$). Usiamo i moltiplicatori di Lagrange per F e G,

$$\begin{cases} 0 & = \partial_n F - \lambda \partial_n G = q x_n^{q-1} - \lambda \\ 1 & = G = \sum_{n=1}^N x_n \end{cases}$$

e otteniamo $x_1 = \cdots = x_N = 1/N$, quindi

$$F = N^{1-q} \leq 2^{1-q} = f(1/2) \leq f(K)$$

Ora, aggiungere vincoli del tipo $x_n = 0$ equivale a cambiare il valore di$N$. Consideriamo il vincolo $x_1 = K$. Poichè $K \leq 1/2$, o $K = 1/2$ e $x_1 = x_2 = 1/2$, quindi $F = f(1/2) = f(K)$, o (cambiando, se necessario, il valore di N per eliminare termini nulli) $0 < x_n < K$ per $n \geq 2$. Rimpiazzando $x_1 = K$ in F e G, troviamo un problema in $N - 1$ variabili, simile a quello sopra, avente soluzioni $x_2 = \cdots = x_N = \frac{1-K}{N-1}$, quindi

$$F = K^q + (N-1)\left(\frac{1-K}{N-1}\right)^q = K^q + (N-1)^{1-q}(1-K)^q \leq K^q + (1-K)^q = f(K)$$

e $f(K)$ è viene assunto per $N = 2$, $x_2 = 1 - K$. ////

4 Un rovesciamento in media di $l^1 \subset l^\infty$

In questo paragrafo cerchereme di vedere più da vicino cosa va storto, per $a = 1$, nella caratterizzazione delle immersioni

$$Id : MB_{a,p} \to L^p(\mu) \tag{27}$$

(assumiamo sempre che $0 \le a \le 1$). Ricordiamo che l'immersione (27) è caratterizzata dalla condizione (7), che ricopio qui per comodità del lettore,

$$\sum_{y \in S(z)} \mu(S(y))^{p'} 2^{a(p'-1)|y|} \le C(\mu)\mu(S(z)) \tag{28}$$

se e solo se $a < 1$; mentre per $a = 1$ la condizione giusta per μ è data da

$$\mu(S(z)) \le C(\mu) 2^{-|z|} \tag{29}$$

Ciò in contrasto con l'immersione

$$Id : B_{a,p} \to L^p(\mu) \tag{30}$$

che è invece caratterizzata dalla condizione (28) per ogni $a \in [0, 1]$. Cerchiamo una condizione "uniforme rispetto ad" a, che ristretta ad $a \in [01)$ dia (28) e che ristretta ad $a = 1$ dia (29). Questa condizione, in effetti, è già presente in letteratura [KS]. Prima di enunciarla, occorre introdurre un'ulteriore notazione.

Sia z un elemento di T. A z associamo l'intervallo $I(z) \subseteq [0, 1]$ definito come segue. Se $z = o_{s_1 s_2 \ldots s_n}$, con $s_j \in \{\pm\}$, allora $I(z)$ è l'intervallo $[\alpha, \beta]$ di ampiezza 2^{-n} in $[0, 1]$ tale che

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n} \frac{1 - s_j 1}{2} 2^{-(j+1)}$$

(in sostanza, T viene identificato con l'insieme degli intervalli in $[0, 1]$ della forma $[(k-1)/2^j, k/2^j]$; o corrisponde all'intervallo $[0, 1]$ stesso; l'ordine parziale su T è quello per inclusione "rovesciato": $z \le w$ se e solo se $I(w) \subseteq I(z)$). [4] Sia μ una misura positiva su T. Come in §3, consideriamo $M_z = \mu(S(z))$. La condizione che ci interessa è la seguente,

$$\int_{I(z)} \sup_{x \in I(w) \subseteq I(z)} \left(M_w^{p'} |I(w)|^{a(1-p')-1} \right) dx \le C M_z \tag{31}$$

Abbiamo infatti i seguenti teoremi.

Teorema 10 *Se $1 < p < \infty$ e $0 \le a < 1$, allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

[4] Con queste identificazioni, l'intervallo $[0, 1]$ con la sua misura di Lebesgue diventa il bordo di Martin di T.

(i) $\sum_{w\geq z} M_w^{p'}|I(w)|^{a(p^{1-'})} \leq CM_z$ *(cioè, (28));*

(ii) $\int_{I(z)} \sup_{x\in I(w)\subseteq I(z)} \left(M_w^{p'}|I(w)|^{a(1-p')-1}\right) dx \leq CM_z$ *(cioè, (31)).*

Teorema 11 *Se $1 < p < \infty$, allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) $\int_{I(z)} \sup_{x\in I(w)\subseteq I(z)} \left(M_w^{p'}|I(w)|^{-p'}\right) dx \leq CM_z$ *(cioè, (31));*

(ii) $M_z \leq C|I(z)|$ *(cioè, (29)).*

I teoremi 10 e 11 sono enunciati esattamente in questa forma in [AR], quindi rimando all'articolo per la dimostrazione. La condizione (31) riproduce fedelmente la condizione che Kerman e Sawyer trovarono nel 1984 per caratterizzare alcune immersioni di Sobolev per funzioni olomorfe, [5] quando $p = 2$. Quindi, per $p = 2$, una dimostrazione indiretta di questi due teoremi è che le coppie di condizioni in essi contenuti caratterizzano entrambe le stesse famiglie di misure μ, quindi le due condizioni di ciascuna coppia sono equivalenti tra loro. In [AR], invece, la dimostrazione dell'equivalenza è diretta, il che permette, tra l'altro, l'estensione a $1 < p < \infty$.[6]

È forse interessante mettere in risalto l'implicazione facile in ciascun teorema.

L'implicazione (i) $\Longrightarrow$ (ii) nel teorema 10 è elementare e vale per ogni valore di a. Per $z \in T$, sia $S_n(z) = \{w \in S(z) : d(z,w) = n\}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{w\geq z} M_w^{p'}|I(w)|^{a(1-p')} &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{S_n(z)} M_w^{p'}|I(w)|^{a(1-p')} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{w\in S_n(z)} \int_{I(w)} M_w^{p'}|I(w)|^{a(1-p')-1}dx \\
&= \int_{I(z)} \sum_{\substack{z\leq w \\ x\in I(w)}} M_w^{p'}|I(w)|^{a(1-p')-1}dx \\
&\geq \int_{I(z)} \sup_{x\in I(w)\subseteq I(z)} \left(M_w^{p'}|I(w)|^{a(1-p')-1}\right) dx.
\end{aligned}$$

L'implicazione inversa, (ii) $\Longrightarrow$ (i), dice che l'inclusione $l^1 \subset l^\infty$ in quest'ultima catena di disuguaglianze può in qualche modo essere rovesciata, da cui il titolo

[5]Vale a dire, la caratterizzazione delle misure positive μ per cui, quale che sia la funzione f olomorfa nel disco $D = \{|z| < 1\}$ nel piano complesso, si abbia che

$$\int_D |f|^2 d\mu \leq C(\mu)\int_D |f'(z)|^2(1-|z|^2)^a dxdy + |f(0)|^2$$

Ora, qui si parla di misure μ sul disco, mentre noi siamo interessati a misure sull'albero T. In realtà, in questo tipo di problemi si può passare dalle une alle altre in maniera standard.

[6]Un'ostruzione all'estensione della dimostrazione indiretta da $p = 2$ a $1 < p < \infty$ è dovuta al fatto che in [KS] si fa uso dell'isometria L^2 della trasformata di Fourier.

di questo paragrafo. Cioè, la disuguaglianza

$$\sup_{x\in I(w)\subseteq I(z)} \left(M_w^{p'} |I(w)|^{a(1-p')-1} \right) = A(x) \leq B(x) = \sum_{\substack{z\leq w \\ x\in I(w)}} M_w^{p'} |I(w)|^{a(1-p')-1}$$

può essere rovesciata, facendo la media rispetto a $x \in I(z)$, per ogni intervallo $I(z)$, se M è una funzione fortemente monotona su T e se $0 \leq a < 1$.

La dimostrazione di (ii) $\Longrightarrow$ (i) si basa su di un argomento a base di tempi d'arresto.

Per mostrare l'implicazione (i) $\Longrightarrow$ (ii) nel teorema 11, basta minorare il sup in (i) con $M_z^{p'} |I(z)|^{-p'}$. La dimostrazione dell'implicazione opposta è un semplice argomento basato su funzioni massimali e interpolazione.

References

[AR] N. Arcozzi, R. Rochberg, *Topics in dyadic Dirichlet spaces*, New York Journal of Mathematics 10 (2004), 45-68, http://nyjm.albany.edu:8000/j/2004/Vol10.htm.

[ARS] N. Arcozzi, R. Rochberg, E. Sawyer, *Carleson measures for analytic Besov spaces*. Rev. Mat. Iberoamericana 18 (2002), no. 2, 443–510.

[Car] L. Carleson, *Interpolation by bounded analytic functions and the corona problem*, Ann. Math. **76** (1962), 547-559.

[KS] R. Kerman, E. Sawyer, *Carleson measures and multipliers of Dirichlet-type spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 309 (1988), 87-98.

[KV] N. Kalton, I. E. Verbitsky, *Nonlinear equations and weighted norm inequalities*. Trans. Amer. Math. Soc. 351 (1999), no.9, 3441–3497.

[NT] F. Nazarov, S. Treil, *The hunt for a Bellman function: applications to estimates of singular integral operators and to other classical problems in harmonic analysis*, St. Petersburg Math. J. **8**, 5 (1997), 721-824.

[Long] R. Long, *Martingale Spaces and Inequalities*, Peking Univ. Press and Vieweg Publishing (1993).

[SWZ] E. Sawyer, R. Wheeden, S. Zhao, *Weighted norm inequalities for operators of potential type and fractional maximal functions*, Potential Anal. 5 (1996), no. 6, 523–580.

[Ste] D. Stegenga, *Multipliers of the Dirichlet space*, Illinois J. Math. **24** (1980), 113-139.

[V] I.E. Verbitsky, *Multipliers in spaces with "fractional" norms, and inner functions* (Russian) Sibirsk. Mat. Zh. 26 (1985), no. 2, 51–72, 221.

[Wang] Jianwen Wang, *Multipliers and interpolating sequences in analytic Besov spaces,* Washington University in St. Louis (1995), Ph.D. thesis.

[Wu] Z. Wu, *Carleson measures and multipliers for the Dirichlet spaces,* J. Funct. Anal. **169** (1999), 148-163.