NORMALE METRICA E REGOLARITÀ DELLA FUNZIONE DISTANZA NEL GRUPPO DI HEISENBERG

NICOLA ARCOZZI, IN COLLABORAZIONE CON F. FERRARI

Abstract. In this joint work with F. Ferrari, we introduce a notion which extends to the Heisenberg group the notion of segment normal to a surface and use it to prove the smoothness of the function measuring the distance to a surface.

Let E be a closed set in the Heisenberg group $\mathbb{H} \equiv \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ with the coordinates (z,t) and the group multiplication $(z,t)(z',t') = (z+z', t+t'+2Re(z\overline{z'}))$. The **metric normal** to E at $P \in E$ is the set $\mathcal{N}_P E = \{Q \in E : \ d_E(Q) = d(Q,E) = d(Q,P)\}$. Here, d is the Carnot-Carathéodory distance in $\mathbb{H}$. The main results presented here are the following.

Theorem A. Let S be a surface in $\mathbb{H}$, which is C^1 in the euclidean sense and satisfies a inner and outer ball condition, in the Heisenberg sense, outside its characteristic set. For $P \in S$ non characteristic, let $\Pi_P S$ be the euclidean plane in $\mathbb{H}$ which is tangent to S at P and let C be the characteristic point of $\Pi_P S$ (eventually at infinity). Then, $\mathcal{N}_P$ is an geodesic arc γ containing containing P and having endpoints different from P. If $\gamma(0) = P$, then $\dot\gamma(0)$ is a vector which is normal to S at P. The orthogonal projection of γ onto the z-plane is an arc of a circle with radius $\frac{d(P,C)}{2}$. These two properties completely characterize $\mathcal{N}_P S$ among all geodesics passing through P.

If the surface S is the boundary of an open set Ω and of $\mathbb{H}-\overline{\Omega}$, we define the **signed distance from** S as $\delta_S(Q) = d_S(Q)$ when $Q \notin \mathbb{H} - \overline{\Omega}$ and $\delta_S(Q) = -d_S(Q)$ when $Q \notin \mathbb{H} - \Omega$

Theorem B. Let S be as above and suppose that S is C^1 in the euclidean sense and that it satisfies an inner and outer ball condition, in the Heisenberg sense, outside its characteristic set. If S_+ is the set of the non characteristic points in S, then there is an open neighborhood $\mathcal{U}$ of S_+ in $\mathbb{H}$ such that $\delta_S \in C^1_{\mathbb{H}}(\mathcal{U})$ is C^1 in the Heisenberg sense in $\mathcal{U}$.

Any surface S which is $C^{1,1}$ in the euclidean sense satisfies an inner and outer ball condition, in the Heisenberg sense, outside its characteristic set.

Contents

1. Introduzione

Sia (X, d) uno spazio metrico e E un sottoinsieme chiuso di X. La distanza tra $P \in X$ ed E é

$$d_E(P) = \min\{d(P, Q) : \ Q \in E\}.$$

La *normale metrica a E in Q* è l'insieme

$$\mathcal{N}_Q E = \{P \in X : \ d(P, Q) = d_E(P)\}.$$

Nel caso in cui $X = \mathbb{R}^n$ sia lo spazio euclideo e E un'ipersuperficie liscia, la normale metrica $\mathcal{N}_Q E$ è null'altro che un segmento normale a E, passante per Q. Più in generale, se E è una sottovarietà liscia di una varietà riemaniana X, $\mathcal{N}_Q E$ è un arco sulla geodetica passante per Q e normale a E. Poichè c'è una corrispondenza biunivoca tra vettori di lunghezza unitaria nello spazio tangente $T_Q X$ e geodetiche aventi origine in Q, nel caso riemaniano come in quello euclideo, possiamo identificare la normale metrica con un vettore in $T_Q X$.

In questo seminario parlerò delle proprietà della normale metrica nel gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}$ dotato della metrica di Carnot-Carathéodory, dove l'applicazione che a una geodetica γ avente origine in P associa $\dot{\gamma}(0)$ non è iniettiva. Dirò quindi come la normale metrica in Q a una superficie liscia S in $\mathbb{H}$ possa essere esplicitamente determinata e calcolata e come essa dipenda dal piano tangente *euclideo* a S in Q, piuttosto che dal gruppo tangente nel senso di Pansu.

Tra le applicazioni della normale metrica in $\mathbb{H}$ c'è la dimostrazione della regolarità della funzione distanza da S, d_S, vicino a S, ma lontano dai suoi punti caratteristici. Non discuterò alcune applicazioni *del secondo ordine* (calcolo dell'Hessiana orizzontale di d_S, curvatura media) per cui rimando a [3].

Nello spazio euclideo, lo studio dettagliato della funzione *distanza da un insieme* e della sua regolarità fu iniziato da Federer [6]. Nel caso della *distanza con segno* un contributo importante venne da [9]. Nuovi risultati e un resoconto di quelli passati sono contenuti in [5].

Le geodetiche per la funzione distanza sul gruppo di Heisenberg sono state trovate indipendentemente da diversi ricercatori [10], [12], [8]. Lo studio della funzione distanza da un insieme in $\mathbb{H}$ pare essere ancora ai suoi inizi. In [11]. R. Monti e F. Serra Cassano, tra le altre cose, mostrano come la distanza da un insieme in $\mathbb{H}$ sia soluzione dell'equazione eiconale. In [1] e [2] vengono dimostrati risultati concernenti la regolarità analitica della funzione distanza e la regolarità del *cut-locus* di un insieme con frontiera subanalitica (stratificazione sub-analitica) per una vasta famiglia di metriche subriemanniane.

Riguardo allo studio delle ipersuperfici nel gruppo di Heisenberg e, più in generale, nei gruppi di Carnot, rimando a [7] e alla bibliografia in essa contenuta, particolarmente ai lavori [13] e [14]. Una serie di articoli di Citti, Manfredini e Sarti (p.es. [4]) sviluppano alcuni temi riguardanti l'analisi e la geometria su strutture subriemanniane modellate sul gruppo di Heisenberg $\mathbb{H} = \mathbb{H}^1$ e le utilizzano per modellare la neurobiologia della visione.

2. Normale metrica: proprietà generali

Sia (X, d) uno spazio metrico localmente compatto. Siano A, B, C punti di X. Diciamo che C sta sulla *geodetica* $[A, B]$ se $d(A, C) + d(C, B) = d(A, B)$.

Lemma 2.1. *Sia E un sottoinsieme chiuso in X.*
(i) Se $P \in \mathcal{N}_Q E$, allora $[P, Q]$ è contenuto in $\mathcal{N}_Q E$.
(ii) Siano $\mathbb{B}(A, r)$ una palla in X e $Q \in \partial\mathbb{B}(A, r)$. Allora, $[Q, A] \subseteq \mathcal{N}_Q \partial\mathbb{B}(A, r)$.

Dim. (i) Sia $C \in [P, Q]$. Se fosse $d(C, R) = d_E(C) < d(C, Q)$ per qualche R in E, allora

$$d(P, Q,) = d(P, C) + d(C, Q) > d(P, C) + d(C, R) \geq d(P, R),$$

quindi $P \notin \mathcal{N}_Q E$.

(ii) Chiaramente $A \in \mathcal{N}_Q \partial \mathbb{B}(A, r)$, quindi (ii) segue da (i).□

Seguendo Federer, definiamo $Unp(E) = \{P \in X : d(P, Q) = d_E(P)\}$ per un unico punto $Q \in E$. Possiamo definire una proiezione $\xi_E : Unp(E) \to E$, $\xi_E(P) = Q$ se $P \in \mathcal{N}_Q E$. Se $P \in Unp(E)$, allora la palla chiusa $\overline{\mathbb{B}(P, d_E(P))}$ incontra E nel solo punto $\xi_E(P)$.

Lemma 2.2. *ξ_E è una funzione continua su $Unp(E)$.*

Dim. La dimostrazione in [6] si estende senza problemi a tutti gli spazi metrici localmente compatti.□

Evidentemente, la nozione di normale metrica è invariante per isometrie.

3. La distanza di Carnot-Carathéodory in $\mathbb{H}$ e le sue geodetiche

La nostra scelta di coordinate per il gruppo di Heisenberg vede gli elementi di $\mathbb{H} \equiv \mathbb{R}^3 \equiv \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ come coppie $(z, t) = (x + iy, t) \equiv (x, y, t)$, col prodotto $(z, t)(z', t') = (z + z', t + t' + 2Re(z\overline{z'}))$. La metrica di *Carnot-Carathéodory* (CC) in $\mathbb{H}$ è la metrica subriemaniana per cui i campi vettoriali invarianti per traslazioni a sinistra $X = \partial_x + 2y\partial_t$ e $Y = \partial_y - 2x\partial_t$ costituiscono, punto a punto, una base ortonormale. La metrica di CC misura solo i vettori che appartengono alla *distribuzione orizzontale* $\mathcal{H}$, le cui fibre sono $\mathcal{H}_P = \mathrm{span}\{X_P, Y_P\}$.

La distanza tra due punti P e Q in $\mathbb{H}$ è definita come segue. Sia γ una curva assolutamente continua in $\mathbb{H}$ con estremi in P e Q, che sia anche *orizzontale*, cioè, $\dot{\gamma}(t) = a(t)X_{\gamma(t)} + b(t)Y_{\gamma(t)}$ giace in $\mathcal{H}_{\gamma(t)}$. La sua lunghezza di Carnot-Carathéodory è $l_{\mathbb{H}}(\gamma)$,

$$l_{\mathbb{H}}(\gamma) = \int (a(t)^2 + b(t)^2)^{1/2} dt$$

La distanza di CC tra P e Q, $d(P, Q)$, è l'estremo inferiore delle lunghezze di CC di tali curve.

Una maniera semplice e utile per raffigurarsi la lunghezza di CC è la seguente. Siano γ una curva orizzontale e sia γ' la sua proiezione ortogonale sul piano $\{t = 0\}$. Allora, la lunghezza di CC di γ è la lunghezza *euclidea* di γ'. Similmente possiamo rappresentare le curve orizzontali. Sia γ' una curva regolare (p.es., C^1 a tratti) sul piano e avente origine in $(0, 0)$. Allora esiste una e una sola curva γ in $\mathbb{H}$ avente origine in O e avente come proiezione γ. Se $\gamma'(\tau)$ è un punto su γ', allora $\gamma(\tau) = (\gamma'(\tau), \gamma''(\tau))$, dove $\gamma''(\tau) = -4A$ e A è l'area con segno della figura piana racchiusa dalla curva ottenuta chiudendo $\gamma'|_{[0,t]}$ con il segmento che congiunge $\gamma'(t)$ a $(0, 0)$.[1]

La distanza di CC tra due punti è realizzata dalla lunghezza di CC della geodetica che li congiunge. Delle geodetiche si conosce l'espressione esplicita [10], [12]. Le geodetiche che minimizzano la lunghezza, aventi inizio in $0 = (0, 0)$ e parametrizzate in modo da avere velocità unitaria, sono

$$\gamma(\sigma) = \begin{cases} x(\sigma) = \sin(\alpha)\frac{1-\cos(\phi\sigma)}{\phi} + \cos(\alpha)\frac{\sin(\phi\sigma)}{\phi} \\ y(\sigma) = \sin(\alpha)\frac{\sin(\phi\sigma)}{\phi} - \cos(\alpha)\frac{1-\cos(\phi\sigma)}{\phi} \\ t(\sigma) = 2\frac{\phi\sigma - \sin(\phi\sigma)}{\phi^2} \end{cases} \tag{1}$$

I parametri da cui dipende la geodetica sono $\alpha \in [0, 2\pi)$, che è legato a $\dot{\gamma}(0) = (e^{i\alpha}, 0)$, e $\phi \in \mathbb{R}$. Quest'ultimo parametro è del tutto non euclideo (non riemaniano): per α fissato, esistono infinite geodetiche aventi velocità iniziale $(e^{i\alpha}, 0)$, una per ciascun valore di ϕ. La geodetica γ minimizza la lunghezza se σ varia lungo un intervallo chiuso di lunghezza $\frac{2\pi}{|\phi|}$.

La proiezione di γ sul piano $\{t = 0\}$ è una circonferenza γ' avente velocità iniziale $\dot{\gamma'}(0) = e^{i\alpha}$, posizione iniziale $\gamma'(0) = 0$, raggio $\frac{1}{|\phi|}$ e percorsa in senso orario o antiorario a seconda che $\phi > 0$

[1] Il teorema di Chow per $\mathbb{H}$ si riduce quindi ad affermare che dati due punti A e B nel piano, esiste un triangolo di lato AB avente area assegnata.

o $\phi < 0$, rispettivamente. [2] Se $\phi = 0$, γ è una retta nel piano $\{t = 0\}$, uscente da 0 nella direzione $e^{i\alpha}$.

In generale, una geodetica η avente inizio in $P \in \mathbb{H}$ è $\eta = P \cdot \gamma$, la traslata a sinistra di una geodetica della forma (1). A volte, metteremo in evidenza i parametri da cui dipende η,

$$\eta = \gamma_{P,N,\phi},$$

dove $N = \dot{\eta}(0)$. Chiaramente, la stessa geodetica può essere percorsa in due versi. Cioè,

$$\gamma_{P,N,\phi}(s) = \gamma_{P,-N,-\phi}(-s).$$

Si osservi che le geodetiche, al contrario del caso euclideo, non sono invarianti rispetto a dilatazioni aventi centro in un loro punto. Sia D_λ la dilatazione di $\mathbb{H}$ avente centro O e coefficiente $\lambda > 0$, $D_\lambda(z,t) = (\lambda z, \lambda^2 t)$. Allora,

$$D_\lambda \gamma_{O,N,\phi}(s) = \gamma_{O,N,\phi/\lambda}(\lambda s),$$

cioè, l'immagine della geodetica è cambiata, a meno che non fosse $\phi = 0$, cioè che la geodetica non fosse una retta euclidea.

L'equazione di $\partial B(O,r)$, la frontiera della palla $B(0,r) = \{P \in \mathbb{H} : \ d(P,O) < r\}$, segue immediatamente da (1),

$$\begin{cases} |z| = 2\frac{\sin(\phi r/2)}{\phi} \\ t = 2\frac{\phi r - \sin(\phi r)}{\phi^2}. \end{cases} \tag{2}$$

dove $\phi \in [-2\pi/r, 2\pi/r]$.

Sia $S = \partial\Omega$ una superficie che separa un aperto Ω da $\mathbb{H} - \overline{\Omega}$. La *distanza con segno da* S è la funzione $\delta_S : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ definita da

$$\delta_S(P) = \begin{cases} -d_S(P) & \text{se } P \in \Omega \\ d_S(P) & \text{se } P \notin \Omega \end{cases} \tag{3}$$

4. La normale metrica a un piano e a una sfera in $\mathbb{H}$

Un *piano* in $\mathbb{H}$ è, semplicemente, un piano euclideo in $\mathbb{R}^3 \equiv \mathbb{H}$, con l'identificazione di cui sopra. I piani euclidei sono oggetti della geometria intrinseca di $\mathbb{H}$. Sia Π un piano "verticale" (cioè, avente equazione della forma $ax + by = c$). Allora, è noto che Π è il laterale di un sottogruppo a due parametri di $\mathbb{H}$. Per i piani non verticali, abbiamo un'interpretazione più metrica.

Sia ora Π un piano non verticale in $\mathbb{H}$. Allora Π ha un punto caratteristico C e può essere identificato come l'unione di tutte le geodetiche di lunghezza infinita aventi origine in C. In particolare, la traslazione a sinistra che porta C in O porta Π nel piano $\{t = 0\}$.

Ricordo che un punto C è *caratteristico* per una superficie S in $\mathbb{H}$ se lo spazio tangente a S in C (nel senso riemanniano) coincide con la fibra in C, $T_C S = \mathcal{H}_C$. Dopo una traslazione a sinistra e una rotazione $(z,t) \mapsto (e^{i\theta}z, t)$, possiamo assumere che il piano abbia equazione $(x,y) \mapsto P = (x, y, mx)$. Una base per $T_C\Pi$ è $\{(1,0,m),\ (0,1,0)\}$, che costituisce una base per $\mathcal{H}_C$ se e solo se $C = (0, \frac{m}{2}, 0)$. In generale, il piano (nonverticale) di equazione $t = ax + by + c$ ha punto caratteristico $C = (-\frac{b}{2}, \frac{a}{2}, c)$. Dei piani verticali, potremmo dire che hanno un punto caratteristico a infinito.[3]

Il ruolo speciale dei piani verticali, messo in luce da Pansu [13], viene loro dal fatto che sono invarianti per dilatazioni, cioè che, al microscopio, assomigliano a se stessi. Al contrario,

[2]Una spiegazione di questo fatto in termini di problemi isoperimetrici sul piano è contenuta in [12].

[3]Il fatto che ci sia una corrispondenza biunivoca $C \mapsto \Pi$ che al punto C di $\mathbb{H}$ associa il piano nonverticale Π avente C come punto caratteristico suggerisce la definizione di un completamento proiettivo di $\mathbb{H}$, aggiungendo un punto C' a "infinito" per ogni piano verticale.

i piani nonverticali non sono invarianti per dilatazioni. Si prenda il piano non verticale $\Pi = \{(x, y, mx) : x, y \in \mathbb{R}\}$. Allora $D_\lambda \Pi = \{(x', y', \lambda m x') : x, y \in \mathbb{R}\} \neq \Pi$, a meno che $m = 0$ (cioè, che la dilatazione avesse centro nel punto caratteristico di Π). Se guardiamo Π "al microscopio", facendo tendere $\lambda \to \infty$, otteniamo al limite il piano verticale $x = 0$.

Teorema 4.1. *Sia Π un piano non verticale in $\mathbb{H}$ e sia $P \in \Pi$ non caratteristico. Sia N_P^+ il vettore normale in senso intrinseco a Π in P, orientato verso l'alto. Se il punto caratteristico di Π è C, allora*

$$\mathcal{N}_P \mathcal{P} = \gamma_{_{P, 2/d(P,C), N_P^+ \mathcal{P}}}([-\frac{\pi}{2} d(P, C), \frac{\pi}{2} d(P, C)]).$$

Se Π è un piano verticale, allora $\mathcal{N}_P \Pi$ è la retta geodetica passante per P nella direzione $N_P \Pi$. La normale metrica in C si riduce al solo punto C.

Chiaramente, abbiamo scelto una delle due parametrizzazioni di per $N_P \Pi$.
Dim. Dopo una traslazione, possiamo considerare il caso $C = O$, $\Pi = \{t = 0\}$. Che la geodetica $\gamma = \gamma_P$ dell'enunciato sia contenuta nella normale metrica è facilmente mostrato da un disegno. Consideriamo la palla B di centro $Q = (0, -2\frac{r^2}{\pi})$ e raggio r. Dall'equazione di B si deduce che B sta nel semispazio $\{t < 0\}$ e che la sua chiusura tocca Π in tutti i punti $(z, 0)$ con $|z| = \frac{2}{r}\pi$. Quindi, per punti $P = (z, 0)$ siffatti la geodetica γ da Q a P sta nella normale metrica a Π in P. La parametrizziamo in modo che $\gamma(0) = P$. Ora, per simmetria, la distanza tra Q e P è metà della vita di γ, cioè, il segmento OP è un diametro di γ', la proiezione ortogonale di γ su Π. Poichè γ punta verso l'alto, $\phi > 0$. Il parametro ϕ^{-1} di γ è proprio il raggio di γ':

$$\frac{1}{\phi} = \frac{r}{\pi}.$$

Quindi, poichè $d(P, O) = 2\frac{r}{\pi}$,

$$\phi = \frac{2}{d(P, O)},$$

come desiderato.

Consideriamo ora il parametro $\dot{\gamma}(0)$. Abbiamo che $N' = \dot{\gamma}'(0)$ è un vettore sul piano $\{t = 0\}$, perpendicolare al vettore V da P a O. Passando ai sollevamenti, $\dot{\gamma}(0)$ è $\mathbb{H}$-perpendicolare al sollevamento di V. Ora, il sollevamento di V è V stesso, quindi V sta nella direzione (orizzontale) tangente a Π in P e, di conseguenza, $\dot{\gamma}(0)$ sta nella direzione $\mathbb{H}$-normale, come desiderato.

Mostriamo che γ_P esaurisce la normale metrica. Al variare di P su Π, l'unione delle geodetiche γ_P è tutto $\mathbb{H}$, quindi, se $Q \in \mathcal{N}_P \Pi - \gamma_P$, deve esistere un altro punto P' in Π tale che $Q \in \gamma_{P'}$. Supponiamo che $Q \in \{t > 0\}$ e che T sia l'estremo di $\gamma_{P'}$ su $\{(0, t) : t \geq 0\}$. Per definizione di normale metrica, $d(Q, P) = d_\Pi(Q) = d(Q, P')$, quindi

$$d_\Pi(T) = d(T, P') = d(Q, P') + d(Q, T) = d(Q, P) + d(Q, T) \geq d(T, P) \geq d_\Pi(T).$$

Ne segue che valgono uguaglianze invece che disuguaglianze, cioè che Q appartiene alla geodetica tra P e T. Poichè tale geodetica non può essere una spezzata di geodetiche (le equazioni (1) non lo permettono), ne segue che $Q = T \in \gamma_P$, assurdo.$\square$

Corollario 4.2. *Sia $B(P, r)$ una palla metrica in $\mathbb{H}$ e sia E la porzione di $\partial B(P, r)$ contenente punti Q tali che, se γ è il prolungamento massimo della geodetica da P a Q, si abbia che $d(P, Q) \leq \frac{1}{2} l_{\mathbb{H}}(\gamma)$. Allora, E è una superficie convessa.*

Osservazione 4.3. *L'equazione della normale metrica in teorema 4.1 può essere scritta esplicitamente. Consideriamo, per esempio, $\Pi = \{t = 0\}$ e $P = (z, t)$, $z = x + iy$. Allora, $\mathcal{N}_P \Pi$ è il* *supporto della geodetica*

$$\gamma(\sigma)=(u(\sigma),\ v(\sigma),\ s(\sigma))=\begin{cases}\frac{x}{2}\left(1+\cos\left(\frac{2\sigma}{|z|}\right)\right)+\frac{y}{2}\sin\left(\frac{2\sigma}{|z|}\right)\\ \frac{y}{2}\left(1+\cos\left(\frac{2\sigma}{|z|}\right)\right)-\frac{x}{2}\sin\left(\frac{2\sigma}{|z|}\right)\\ \frac{|z|^2}{2}\left(\frac{2\sigma}{|z|}+\sin\left(\frac{2\sigma}{|z|}\right)\right)\end{cases},\ |\sigma|\le\frac{\pi}{2}|z| \tag{4}$$

L'equazione per un piano in generale si ottiene per traslazione a sinistra.

Già nel semplice caso dei piani vediamo come la determinazione della normale metrica a un punto non sia racchiusa nella nozione di *gruppo tangente secondo Pansu*[4]. Prendiamo, per esempio, la famiglia di piani Π_m dati dalle equazioni $(x,y)\mapsto(x,y,mx)$, $m\ge 0$. La direzione normale secondo Pansu a Π_m in O è data da $n_O\Pi_m=-X_O\equiv(-1,0,0)$, la stessa per tutti i piani della famiglia. La normale metrica a Π_m in O è $\mathcal{N}_O\Pi_m$, la geodetica di equazione

$$\gamma(\sigma)=\begin{cases}x(\sigma)=-\frac{\sin(4s/m)}{4/m}\\ y(\sigma)=\frac{1-\cos(4s/m)}{4/m}\\ t(\sigma)=2\frac{4s/m-\sin(4s/m)}{16/m^2}\end{cases}$$

che varia al variare di m. Si osservi che nel limite "verticale" $m=\infty$ la geodetica si riduce alla retta $s\mapsto(-s,0,0)$.

Questo fatto può essere spiegato in termini di dilatazioni. I piani non verticali passanti per O per cui O è non caratteristico non sono invarianti per dilatazioni, quindi le loro normali metriche devono variare quando i piani vengono dilatati. Infatti, abbiamo visto come le geodetiche avente origine in O non sono in genere invarianti per dilatazioni D_λ aventi centro in O. Visto dal punto di vista delle geodetiche, lo stesso fatto dice che i piani verticali non sono sufficienti a discriminare tra geodetiche diverse, cioè che la normale metrica a una superficie non può essere catturata dalla sola normale di Pansu.

Vediamo ora di determinare la normale metrica a una sfera Heisenberg.

Lemma 4.1. *Esiste un numero positivo δ tale che, per ogni $r\in]0,1[$, per ogni ϕ, $|\ \phi r\ |\le\delta$ e per ogni $Q\in\mathbb{H}$, se γ è una geodetica di parametro ϕ e estremi Q e P, $P\in\partial B(Q,r)$, e se $B=B(Q,r)$, allora*

$$\Pi_P(\partial B)\cap\bar{B}=\{P\}.$$

Proof. Senza perdere in generalità, supponiamo $Q=0$. □

Proposizione 4.4. *Siano $B=B(Q,r)$ una palla Heisenberg e P un punto dove la frontiera di B è liscia. Sia γ_P la geodetica di lunghezza massima che inizia in Q e passante per P. Allora*

i) $\mathcal{N}_P(\partial B)=\gamma_P$.

ii) *Un arco aperto di γ_P contenente P è contenuto $\mathcal{N}_P(\partial B)\cap\mathcal{N}_P(\Pi_P(\partial B))$.*

Proof. Dimostriamo (i). Sia Q' l'altro estremo di γ_P. Per la disuguaglianza triangolare, $d(Q',P)=d_{\partial B}(Q')$. Quindi, per il lemma 2.1 (i), l'arco di γ_P tra P e Q' è contenuto in $\mathcal{N}_P(\partial B)$. Chiaramente, lo è anche l'arco di γ_P tra P e Q. Quindi, $\gamma_P\subseteq\mathcal{N}_P(\partial B)$.

Supponiamo ora $A\in\mathcal{N}_P\partial B$ e $A\notin\gamma_P$. Supponiamo anche, per il momento, che $A\notin B$. Sia η una geodetica tra A e Q e sia P' la sua intersezione con ∂B. Allora $d(A,P')\ge d_{\partial B}(A)=d(A,P)$

[4]Ricordo quìle definizione di alcuni oggetti del calcolo sulle superfici in $\mathbb{H}$. Sia $S\subset\mathbb{H}$ una superficie C^1 in senso euclideo (questa restrizione non è necessaria in generale) e sia T_PS lo spazio tangente a S in P. Se P non è caratteristico per S, allora $\mathcal{T}_P=\mathcal{H}_P\cap T_PS$ è uno spazio vettoriale di dimensione 1. Chiamiamo $\mathcal{T}_P$ la *direzione (orizzontale) tangente* a S in P. $\tilde{N}_P=\mathcal{H}_P\ominus\mathcal{T}_P$ è la *direzione (orizzontale) normale* a S in P. Il complemento ortogonale è fatto rispetto alla metrica introdotta in $\mathcal{H}_P$. Possiamo identificare $\mathcal{T}_P$ con N_PS, uno dei suoi due vettori unitari. Quando la superficie S è la frontiera di un aperto Ω e separa Ω da $\mathbb{H}-\overline{\Omega}$, scegliamo il verso normale *uscente* da Ω: $P+\tau N_PS\notin\Omega$ se $\tau>0$ è abbastanza piccolo. Il *gruppo tangente* a S in P è $\mathcal{T}_P\oplus\mathcal{C}$, dove $\mathcal{C}=\{(0,t):\ t\in\mathbb{R}\}$ è il commutatore di $\mathbb{H}$.

e $d(Q,P') = r = d(Q,P')$. Dunque, $d(A,Q) \le d(Q,P)+d(P,A) \le d(Q,P')+d(P',A) = d(A,Q)$, il che è possibile solo se P appartiene a una geodetica tra A e Q che prolunga l'arco di γ_P tra Q e P. Cioè, A appartiene al prolungamento della geodetica tra P e Q, ma il prolungamento massimale è γ_P.

Se invece $A \in B$, un argomento simile mostra che $A \in \gamma_P$. I dettagli sono lasciati al lettore.

Mostriamo ora (ii). Per il lemma 4.1, esiste un punto Q' su γ_P tale che la chiusura $B' = B(Q', d(Q',P))$ incontra $\Pi_P(\partial B') = \Pi_P(\partial B)$ nel solo punto P. Allora, per definizione di normale metrica, l'arco di γ_P tra P e Q' giace in $\mathcal{N}_P(\Pi_P(\partial B))$. D'altra parte, per (i), γ_P è contenuto in $\mathcal{N}_P(\partial B)$.

Un argomento del tutto simile mostra che esiste un arco di γ_P esterno a B che giace in $\mathcal{N}_P(\partial B) \cap \mathcal{N}_P(\Pi_P(\partial B))$.

□

Daniele Morbidelli ha osservato come la normale metrica al Polo Nord PN di $B(Q,r)$ non sia una geodetica, bensìl'unione $\mathcal{K}$ di tutte le geodetice aventi origine in Q e punto finale sul segmento (verticale) tra Q e PN. Incidentalmente, $\mathcal{K}$ è un insieme la cui frontiera ha curvatura Heisenberg costante e positiva, e si congettura che sia estremale per la disuguaglianza isoperimetrica in $\mathbb{H}$.

5. La normale metrica a superfici regolari

Avendo determinato la normale metrica per piani e sfere, è ora possibile determinarla per superfici regolari in $\mathbb{H}$.

Sia la superficie S il bordo di un aperto Ω e di $\mathbb{H} - \overline{\Omega}$ e sia $P \in S$. Diciamo che S *soddisfa la condizione (TB)* (palla tangente) in P se possiamo trovare due palle B_1 e B_2 di raggio positivo contenute in Ω e $S - \overline{\Omega}$, rispettivamente, tali che $P \in \partial B_j$.

La condizione (TB), di per sè, implica che S ha piano tangente nel senso (euclideo) di Feder.[5] Infatti il punto P non può essere un polo di B_1 o di B_2. Se fosse un polo di B_1, per esempio, allora $S = \partial\Omega$ avrebbe una rientranza almeno conica (nel senso euclideo) in P, ma questo esclude la possibilità che vi sia una palla B_2 tangente a S in P. Poichè ∂B_1 e ∂B_2 si toccano in P soltanto e B_1 e B_2 sono entrambe esterne a S, ne segue che S, ∂B_1 e ∂B_2 hanno lo stesso piano tangente (euclideo) Π in P.

Teorema 5.1. *Sia S una superficie che è bordo di un aperto Ω e separa Ω da $\mathbb{H} - \overline{\Omega}$.*

(i) Se $P \in S$ e S è differenziabile in P, allora $\mathcal{N}_P S$ è un arco di geodetica contenente P.

Più precisamente, se $\Pi_P S$ è il piano tangente a S in P, allora $\mathcal{N}_P S \cap \mathcal{N}_P \Pi_P S$ è (l'immagine di) un arco di geodetica contenente P. In particolare, se l'arco di geodetica non degenera in un punto, allora l'equazione di $\mathcal{N}_P S$ è quella di $\mathcal{N}_P \Pi_P S$.

(ii) Supponiamo, inoltre, che S soddisfi la condizione (TB) in P. Allora $\mathcal{N}_P S$ è un arco di geodetica contenente P al suo interno. In particolare, $\mathcal{N}_P S$ è una geodetica non degenere.

Dimostrazione. (i) Se $\mathcal{N}_P S$ si riduce al solo punto P, non c'è nulla da mostrare. Altrimenti, sia $P \ne Q \in \mathcal{N}_P S$, $Q \in \Omega$. In particolare, la geodetica $[Q,P]$ sta in $\mathcal{N}_P S$. Questo significa che la palla $B(Q, d(P,Q))$ sta in Ω e $P \in \partial B(Q, d(P,Q))$. Poichè $\partial B(Q, d(P,Q))$ è differenziabile in P e, forzatamente, S e $\partial B(Q, d(P,Q))$ devono avere lo stesso piano tangente, $\Pi_P S$. Ora, la geodetica $[Q,P] \subseteq \mathcal{N}_P \partial B(Q, d(P,Q))$, quindi, per il lemma 4.1, un suo arco contenente P sta in $\mathcal{N}_P \Pi_P S$. Per il teorema 4.1, allora l'equazione di $[P,Q]$ è completamente determinata, e così quella di $\mathcal{N}_P S$. Quindi, la parte di $\mathcal{N}_P S$ contenuta in Ω sta su una geodetica.

Lo stesso discorso vale se $Q \in \mathbb{H} - \overline{\Omega}$. Rimane da mostrare che, unendo le due geodetiche, si ottiene ancora una geodetica. Siano $Q \in \Omega \cap \mathcal{N}_S$ e $Q' \in (\mathbb{H} - \overline{\Omega}) \cap \mathcal{N}_S$. Se fosse $d(Q,P) + d(P,Q') > d(Q,Q')$, allora esisterebbe $R \ne P$, $R \in S \cap [Q,Q']$. Poichè $d(Q,R) + d(R,Q') = d(Q,Q')$, $d(Q,P) > d(Q,R)$ o $d(P,Q') > d(R,Q')$, che è assurdo.

[5] Ciò significa che esiste un piano in $\mathbb{H} \equiv \mathbb{R}^3$ che ha ordine di contatto al second'ordine (nel senso euclideo) con S.

(ii) Le geodetiche sono non banali proprio in virtù dell'ipotesi e della proposizione 4.4.$\square$

Corollario 5.2. *Sia S una superficie che è bordo di un aperto Ω e separa Ω da $\mathbb{H}-\overline{\Omega}$, sia S differenziabile e sia $C \in S$ un punto caratteristico di S. Allora S non può soddisfare (TB) in C.*

Dim. Per il teorema precedente, $\mathcal{N}_C S$ conterrebbe un arco non degenere di $\mathcal{N}_C \Pi_C S$, ma $\Pi_C S$ ha C come punto caratteristico, quindi $\mathcal{N}_C \Pi_C S$ è esso stesso degenere.$\square$

Nel caso in cui $S = \partial\Omega$ e in cui la normale metrica a S in P è un arco di geodetica, ha senso dare a $\mathcal{N}_P S$ un orientamento. Sceglieremo, convenzionalmente, come *orientamento positivo* di $\mathcal{N}_P S$ quello che punta verso l'esterno di Ω. Più precisamente, sceglieremo la parametrizzazione di $\gamma = \mathcal{N}_P S$ per cui $\gamma(0) = P$ e $\dot{\gamma}(0) = N_P S$ è il vettore normale secondo Pansu *uscente da* Ω. In altre parole, se $s > 0$, allora $\gamma(s) \notin \Omega$ e se $s < 0$, allora $\gamma(s) \in \Omega$.

5.1. **Espressione esplicita della normale metrica.** Sia S una superficie che è bordo di un aperto Ω e separa Ω da $\mathbb{H}-\overline{\Omega}$ e supponiamo che, localmente, S abbia equazione $g = 0$, dove $g : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ è una funzione con derivate parziali rispetto a x, y, t in un intorno di P, punto non caratteristico di S (in termini di g, questo significa $\nabla_{\mathbb{H}} g(P) \neq 0$). Assumeremo anche, per semplicità, che $\Pi_P S$ sia un piano non verticale. Sia C il punto caratteristico di

$$\Pi_P S = \{(x,y,t) :\ \partial_x g(P)(x - x(P)) + \partial_y g(P)(y - y(P)) + \partial_t g(P)(t - t(P)) = 0\}.$$

Allora,

$$C = \left(\frac{g_y(P)}{2g_t(P)}, -\frac{g_x(P)}{2g_t(P)}, t_0 + x_0\frac{g_y(P)}{g_t(P)} + y_0\frac{g_x(P)}{g_t(P)}\right) \tag{5}$$

e

$$d(P,C) = 2\frac{|\nabla_{\mathbb{H}} g|}{|[X,Y]g|} = \frac{|\nabla_{\mathbb{H}} g|}{2|\partial_t g|} \tag{6}$$

Supponendo che in un intorni di P si abbia $\Omega = \{g < 0\}$. Il vettore normale secondo Pansu uscente da Ω in P è allora

$$N_P S = \frac{\nabla_{\mathbb{H}}(P)}{|\nabla_{\mathbb{H}}(P)|}.$$

L'equazione di $\mathcal{N}_P S$, alla luce dei teoremi 5.1 e 4.1, può essere ora scritta in termini delle derivate prime di g in P. $\mathcal{N}_P S = P \cdot \mathrm{supp}(\eta)$ (traslazione a sinistra di P), dove $\eta = (u,v,s)$ e

$$\eta(\sigma) = \begin{cases} u(\sigma) = \frac{1}{4\partial_t g}\left\{Yg(P)\left(1 - \cos\left(\frac{4\partial_t g(P)\sigma}{|\nabla_{\mathbb{H}} g(P)|}\right)\right) + Xg(P)\sin\left(\frac{4\partial_t g(P)\sigma}{|\nabla_{\mathbb{H}} g(P)|}\right)\right\} \\ v(\sigma) = \frac{1}{4\partial_t g}\left\{-Xg(P)\left(1 - \cos\left(\frac{4\partial_t g(P)\sigma}{|\nabla_{\mathbb{H}} g(P)|}\right)\right) + Yg(P)\sin\left(\frac{4\partial_t g(P)\sigma}{|\nabla_{\mathbb{H}} g(P)|}\right)\right\} \\ s(\sigma) = \frac{|\nabla_{\mathbb{H}} g(P)|^2}{8(\partial_t g(P))^2}\left\{\frac{4\partial_t g(P)\sigma}{|\nabla_{\mathbb{H}} g(P)|} - \sin\left(\frac{4\partial_t g(P)\sigma}{|\nabla_{\mathbb{H}} g(P)|}\right)\right\} \end{cases} \tag{7}$$

Quando $\partial_t g(P) = 0$, cioè, quando $\Pi_P S$ è verticale, (7) diventa

$$\eta(\sigma) = \left(\frac{Xg(P)}{|\nabla_{\mathbb{H}} g(P)|}\sigma, \frac{Yg(P)}{|\nabla_{\mathbb{H}} g(P)|}\sigma, 0\right) \tag{8}$$

Queste formule mettono in evidenza il fatto che le derivate Xg e Yg, da sole, non sono sufficienti a scrivere l'equazione della normale metrica: abbiamo anche bisogno di conoscere $[X,Y]g = -4\partial_t g$. Questo fatto suggerisce che la giusta regolarità da richiedere a delle superfici $S = \{g = 0\}$ di cui si studia l'associata funzione distanza debba coinvolgere tutte le derivate parziali euclidee di g. Del resto, un altro indizio di questa necessità ci è fornito dal fatto che (TB) implichi l'esistenza del piano tangente euclideo nel senso di Federer.

Nel prossimo paragrafo ci concentreremo su superfici che sono C^1 dal punto di vista euclideo. La condizione C^1 è intermedia tra $C^1_{\mathbb{H}}$ (Xg e Yg continue) e $C^2_{\mathbb{H}}$ (continuità anche delle derivate XXg, $XYg, \cdots$). A queste ultime, infatti, si chiede solo la continuità del commutatore $[X,Y]g$.

6. Insiemi intubabili (*positive reach*)

In questo paragrafo verifichiamo che la condizione (TB), anzi, un suo rafforzamento, è soddisfatta da una vasta famiglia di superfici. Vedremo poi come questa condizione ci dia delle informazioni su $Unp(S)$.

Diciamo che una superficie S *soddisfa la condizione (UTB)* (palla tangente uniforme) se S è bordo di un aperto Ω e separa Ω da $\mathbb{H}-\overline{\Omega}$ e se S è unione di un insieme chiuso S_- avente misura di Hausdorff $H^3_{\mathbb{H}}$ nulla e di un insieme S_+ con la seguente proprietà.

Per ogni P_0 in S_+ esistono $r > 0$ e $h > 0$ tale che, per ogni $P \in B(P_0, r) \cap S$ possiamo trovare due palle B_1 e B_2 di raggio h contenute in Ω e $\mathbb{H} - \overline{\Omega}$, rispettivamente, tali che $P \in \partial B_j$.

Diciamo che S sta nella classe $\mathcal{F}$ se S è C^1 in senso euclideo e se soddisfa (UTB).

Indicheremo con $Char(S)$ l'insieme dei punti caratteristici di una superficie differenziabile S.

Teorema 6.1. *Sia S una superficie di classe $C^{1,1}$ nel senso euclideo. Allora, S soddisfa (UTB) con $S'_- = Char(S)$.*

Cenno di dim. Federer ha mostrato [6] che, se S è $C^{1,1}$, allora S soddisfa la condizione in (UTB) con palle euclidee invece di palle Heisenberg. Basta allora mostrare che, se B_{euc} è una palla euclidea in Ω la cui chiusura tocca S in P e P è non caratteristico per S, allora esiste una palla Heisenberg B contenuta in B_{euc} la cui chiusura passa per P e che possiamo far variare il raggio di B con continuità al variare del punto P sulla porzione non caratteristica di S. Questo può essere fatto esplicitamente [3], per esempio, utilizzando il fatto che le palle Heisenberg di raggio r piccolo hanno, vicino all'equatore, raggio di curvatura (euclideo) che tende a zero con r. $\square$

Diciamo che S *soddisfa la condizione (PR)*, o che è *localmente intubabile*, se S è bordo di un aperto Ω, se S separa Ω da $\mathbb{H} - \overline{\Omega}$ e se S è unione di un insieme chiuso S'_- avente misura di Hausdorff $H^3_{\mathbb{H}}$ nulla e di un insieme $S'_+ \subset int(Unp(S))$.

Teorema 6.2. *Sia S una superficie di classe C^1 in senso euclideo. Allora, $S \in \mathcal{F}$ se e solo se S soddisfa (PR).*

Dim. Mostriamo che $S \in \mathcal{F}$ implica che S soddisfa (PR). Siano P_0, r e h come nell'enunciato di (UTB) e siano $U = B(P_0, r) \cap S$, $\mathcal{U} = U \times (-h, h)$. $\mathcal{U}$ può essere pensato, se r è abbastanza piccolo, come un aperto di $\mathbb{R}^3$. Definiamo, localmente, la *funzione esponenziale*

$$\exp_S : \mathcal{U} \to \mathbb{H}, \ \exp_S(P, \sigma) = \mathcal{N}_P S(\sigma).$$

Si verificano i seguenti fatti.

(i) $\exp_S$ è $1-1$ su $\mathcal{U}$.
(ii) $\exp_S(\mathcal{U}) \subseteq Unp(S)$.
(iii) $\exp_S$ è continua.

L'unico punto apparentemente delicato è (iii). Si noti che la funzione $\exp_S$ può essere calcolata esplicitamente una volta che si conoscano le equazioni della normale metrica. Se $S = \{g = 0\}$ in $B(P_0, r)$ e se, lo supponiamo per comodità, $\Pi_P S$ è non verticale per ogni P in $B(P_0, r)$, allora, a meno di un cambiamento di verso, la normale metrica orientata a S in P è $\exp_S(P, \sigma) = \mathcal{N}_P S(\sigma) = P \cdot \eta(\sigma)$, dove η è la geodetica in (7). Essendo g di classe C^1, $\exp_S(P, \sigma)$ dipende con continuità da P e da σ.

Ora, si consideri la mappa

$$G : Unp(S) \to S \times \mathbb{R}, \ G(Q) = (\xi_S(Q), \delta_S(Q)).$$

Per il lemma 2.2, G è una funzione continua. Chiaramente, $G \circ \exp_S = Id$. Quindi, $\mathcal{U}$ e $\exp_S(\mathcal{U})$ sono omeomorfi, $\mathcal{U}$ è (identificabile con) un aperto di $\mathbb{R}^3$, quindi, per il teorema di Brouwer sull'invarianza del dominio, $\exp_S(\mathcal{U}) \subseteq Unp(S)$ è un aperto di $\mathbb{H}$ contenuto in $Unp(S)$. Poichè $\exp_S(\mathcal{U})$ contiene tutti i punti $\exp_S(P, 0) = P \in B(P_0, r) \cap S$, si ha che S soddisfa (CR).

Vediamo ora la dimostrazione dell'implicazione inversa. Consideriamo ancora la mappa G, definita questa volta su $int(Unp(S))$. G è continua. Mostriamo che G è $1-1$. Consideriamo due punti Q e Q' in $Unp(S)$ tali che $\xi_S(Q) = \xi_S(Q')$ e $\delta_S(Q) = \delta_S(Q')$. Essendo S di classe C^1, per il teorema 5.1 Q e Q' devono essere punti che stanno sulla stessa geodetica passante per $P = \xi_S(Q) = \xi_S(Q')$, alla stessa distanza da P, sulla stessa semigeodetica di origine P. Quindi, $Q = Q'$. La funzione inversa di G è $\exp_S$, di cui abbiamo già verificato la continuità. Ancora per il teorema di Brouwer, $G(int(Unp(S))) = \mathcal{U}$ è un insieme aperto in $S \times \mathbb{R}$, quindi la sua proiezione sulla prima componente è un insieme $\mathcal{V}$ aperto in S. Per definizione di G, per ogni punto P in $\mathcal{V}$ esistono palle B_1 e B_2 in Ω e $\mathbb{H} - \overline{\Omega}$, rispettivamente, contenenti P sulla loro chiusura. Per avere l'uniformità richiesta da (UBT), consideriamo la restrizione di G agli insiemi aperti $(int(Unp(S)) \cap \{d_S(P) > h\}$, $h > 0$, e le proiezioni sulla prima componente di $G((int(Unp(S)) \cap \{d_S(P) > h\})$. I dettagli sono lasciati al lettore.$\square$

7. Regolarità della funzione distanza

Teorema 7.1. *Sia $S = \partial\Omega$ una superficie C^1 in senso euclideo che separa un aperto Ω da $\mathbb{H}-\overline{\Omega}$. Allora, $\delta_S \in C^1_{\mathbb{H}}(int(Unp(S)))$.*

Corollario 7.2. *Se $S \in \mathcal{F}$, allora esiste un intormo aperto $\mathcal{U}$ di $S - Char(S)$ in $\mathbb{H}$ tale che $\delta_S \in C^1_{\mathbb{H}}(\mathcal{U})$.*

Dim. La dimostrazione si divide in diversi passi.
Passo 1. Sia $P \in Unp(S) - S$ e sia δ_S $\mathbb{H}$-differenziabile in P. Sia γ_P la parametrizzazione a velocità unitaria di $\mathcal{N}_{\xi_S(P)}S$ che rispetta l'orientamento (cioè, tale per cui $\gamma_P(\delta_S(P)) = P$). Allora,

$$\nabla_{\mathbb{H}}\delta_S(P) = \dot{\gamma_P}(\delta_S(P)) \tag{9}$$

Mostriamo (9). Allora,

$$\delta_S(\gamma_P(t)) = t,$$

quindi

$$1 = \frac{d}{dt}|_{t=\delta_S(P)}\delta_S(\gamma_P(t)) = \langle \dot{\gamma_P}(\delta_S)(P), \nabla_{\mathbb{H}}\delta_S(P)\rangle_{\mathbb{H}}.$$

D'altra parte, per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e l'equazione eiconale (o meglio, per l'elementare disuguaglianza $\|\nabla_{\mathbb{H}}\delta_S(P)\|_{\mathbb{H}} \leq 1$, che segue direttamente dal teorema di Rademacher in $\mathbb{H}$), abbiamo che

$$\langle \dot{\gamma_P}(\delta_S)(P), \nabla_{\mathbb{H}}\delta_S(P)\rangle_{\mathbb{H}} \leq \|\dot{\gamma_P}(\delta_S(P))\|_{\mathbb{H}}\|\|\nabla_{\mathbb{H}}\delta_S(P)\|_{\mathbb{H}} \leq 1.$$

Quindi, le disuguaglianze sono tutte uguaglianze. In particolare, ciò implica (9).
Passo 2. Sia S una superficie C^1 in senso euclideo e, per ogni $P \in Unp(S) - S$, sia γ_P la geodetica definita al passo 1. Allora, $P \mapsto \dot{\gamma_P}(\delta_P)$ definisce un campo vettoriale orizzontale continuo in $int(Unp(S)) - S$, che si estende con continuità a $int(Unp(S))$.

Infatti, abbiamo visto come la mappa $P \mapsto (\xi_S(P), \delta_S(P))$ sia continua. Sia $\xi_S(P) = Q$. L'equazione di $\gamma_P = \mathcal{N}_Q S$ dipende con continuità da Q e in particolare dipendono con continuità da Q i coefficienti N_Q e $\phi = \phi_Q$. Questo segue dalle equazioni (7) e dall'ipotesi che S sia C^1 in senso euclideo.

Poichè γ_P è il sollevamento di una circonferenza γ'_P percorsa a velocità unitaria e per andare da Q a P impieghiamo un tempo $\delta_S(P)$, e il vettore tangente a γ_P è il sollevamento orizzontale del vettore tangente a γ'_P, semplici considerazioni geometriche mostrano che $\dot{\gamma_P}(\delta_P)$ si ottiene da $\dot{\gamma_P}(0) = N_Q S$ per rotazione di un angolo

$$\theta = \frac{2\delta_S}{d(Q,C)} = \frac{4|\partial_t g(Q)|\delta_S(P)}{|\nabla_{\mathbb{H}} g(Q)|_{\mathbb{H}}},$$

dove C è il punto caratteristico di $\Pi_Q S$. Più formalmente,

$$\dot{\gamma}_P(0) = (R_{P,\theta})_{*,P}(L_{P\xi(P)^{-1}})_{*,\xi(P)}N_{\xi(P)}S,$$

dove $R_{P,\theta}$ è una rotazione Heisenberg attorno a P, $L_{P\xi(P)^{-1}}$ è una traslazione e A_* indica il differenziale della funzione $A : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$. Poichè anche θ dipende con continuità da P, abbiamo che $P \mapsto \dot{\gamma_P}(\delta_P)$ è una mappa continua su $int(Unp(S)) - S$. I punti di $\int(Unp(S)) \cap S$ sono interni a geodetiche aventi estremi in $int(Unp(S)) \cap \Omega$ e $int(Unp(S)) \cap (\mathbb{H} - \overline{\Omega}$, rispettivamente, per il teorema 6.2. Possiamo allora estendere con continuità $P \mapsto \dot{\gamma_P}(\delta_S)$ a $\int(Unp(S)) \cap S$ associando $Q \mapsto N_Q S$ se $Q \in \int(Unp(S)) \cap S$.

Passo 3. La funzione δ_S è $\mathbb{H}$-Lipschitziana in $int(Unp(S))$, quindi è $\mathbb{H}$-differenziabile quasi ovunque. Dove è differenziabile, per il passo 1 il suo gradiente è il campo $\nabla_{\mathbb{H}}\delta_S(P) = \dot{\gamma_P}(\delta_S(P))$ che, per il passo 2, si estende a una funzione continua su $int(Unp(S))$. Il lemma che segue conclude la dimostrazione del teorema.

Lemma 7.1. *Siano f una funzione lipschitziana nell'aperto W di $\mathbb{H}$, g una funzione continua in W e V una qualsiasi campo vettoriale invariante a sinistra. Se $Vf = g$ nei punti dove $Vf = g$ esiste, allora f è $C^1_{\mathbb{H}}(W)$ e $Vf = g$ in W.*

La dimostrazione è del tutto analoga a quella del corrispondente lemma in [6].□

Nel caso in cui la superficie S abbia maggior regolarità, anche la regolarità di δ_S migliora. Per esempio, vale il seguente teorema.

Teorema 7.3. *Siano $k \geq 2$ e $S = \partial\Omega$ una superficie C^k in senso euclideo che separa un aperto Ω da $\mathbb{H} - \overline{\Omega}$. Allora esiste esiste un intormo aperto $\mathcal{U}$ di $S - Char(S)$ in $\mathbb{H}$ tale che $\delta_S \in C^{k-1}(\mathcal{U})$ e $\nabla_{\mathbb{H}}\delta_S \in C^{k-1}(\mathcal{U})$.*

Cenno di dim. La dimostrazione si basa su quella del teorema 7.1 e sul teorema della funzione inversa euclideo. È forse interessante il calcolo che rende possibile utilizzare quest'ultimo. Supponiamo che in un suo intorno $S = \{t = f(x,y)\}$, con f di classe C^1 in senso euclideo. Ciò significa che siamo in un aperto di S dove $\Pi_P S$ è un piano nonverticale. Consideriamo la funzione composta $F : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{H}$,

$$(x, y, \sigma) \mapsto (x, y, f(x, y), \sigma) = P \mapsto \exp_S(P, \sigma)$$

Si consideri la matrice jacobiana JF di F rispetto alle basi $\{\partial_x, \partial_y, \partial_\sigma\}$, nello spazio di partenza, e $\{X, Y, \partial_t\}$, nello spazio d'arrivo. Allora,

$$det(JF(x, y, 0)) = 2d(P, C), \tag{10}$$

dove $P = (x, y, f(x, y))$ e C è il punto caratteristico di $\Pi_P S$. Se P è non caratteristico, cioè se $d(P, C) \neq 0$, allora possiamo localmente invertire F, il che ci dà, in particolare, la regolarità della funzione distanza σ.□

Nella relazione (10) appaiono diversi personaggi già incontrati in questo seminario. Il piano tangente in P a S nel senso euclideo, il suo punto caratteristico e la funzione esponenziale associata a S. Cè anche la proiezione $proj : \mathbb{H} \to \mathbb{R}^2$, $(z, t) \mapsto z$, che ha un significato geometrico intrinseco, riflesso in questo caso particolare nell'apparizione della quantità geometrica $d(P, C)$.

8. Commenti e problemi

(i) Sia S una superficie C^1 in Heisenberg, che separa un aperto Ω dal suo complementare. Il *cut-locus* di S, $K(S)$, può essere definito come l'insieme dei punti del tipo $\mathcal{N}_P(t)$ che sono estremi della normale metrica $\mathcal{N}_P S$ per qualche P in S. I seguenti fatti sono verificati e elementari [3].

(1) $K(S)$ ha interno vuoto.
(2) $K(S) - S$ ha tutti i punti caratteristici di S nella sua chiusura.

(3) Se $\Pi = \{t = 0\}$, $K(\Pi)$ è l'asse verticale $z = 0$.
(4) $K(S) \subseteq \mathbb{H} - int(Unp(S))$.

Crediamo che, in effetti, $K(S)$ sia chiuso e che, più precisamente, $K(S) = \mathbb{H} - int(Unp(S))$, ma non abbiamo una dimostrazione di questo fatto. Più in generale, si vorrebbero avere informazioni su $K(S)$ a secondadella regolarità di S. Crediamo, ma non sappiamo mostrare che δ_S non sia differenziabile in nessun punto di $K(S)$.

(ii) Gran parte dei risultati presentati in questo seminario dovrebbero potersi estendere almeno ai gruppi di Lie di passo 2. Sembra che l'unico ingrediente la cui presenza è da verificare sia la convessità della palla metrica, almeno vicino al suo *equatore*.

(iii) Per trovare la normale metrica a una superficie abbiamo tratto ispirazione e informazione dal caso in cui la superficie è un piano. Non è del tutto chiaro, però, se il ruolo dei piani sia accidente o sostanza. Per ottenere risultati nel caso dei gruppi di passo superiore a 2, è probabile che si debba trovare una dimostrazione che, anche nel caso di $\mathbb{H}$, non passi attraverso i "piani".

(iv) Nel caso euclideo, il teorema 7.1 vale (solo su $Unp(S) - S$) se al posto di S consideriamo un insieme E chiuso in $\mathbb{H}$, senza alcuna ipotesi di regolarità su E. È naturale chiedersi se un risultato simile possa essere dimostrato anche in $\mathbb{H}$.

(v) Nel caso euclideo, S ha *reach positivo* se e solo se $\delta_S^2 \in C^{1,1}$. Esiste una caratterizzazione simile in $\mathbb{H}$ (cioè, un enunciato che dica che vale (PR) se e solo se S soddisfa qualche condizione di regolarità)?

References

[1] Agrachev, Andrei; Gauthier, Jean-Paul,*On the subanalyticity of Carnot-Caratheodory distances.* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 18 (2001), no. 3, 359–382.

[2] Paolo Albano, Antonio Bove*Analytic Stratifications and the Cut-locus of Class of Distance Functions*, preprint.

[3] N. Arcozzi; F. Ferrari, *Metric Normal and distance Function in the Heisenberg Group*, preprint.

[4] Citti, Giovanna; Manfredini, Maria; Sarti, Alessandro*Neuronal oscillations in the visual cortex: Γ-convergence to the Riemannian Mumford-Shah functional.* SIAM J. Math. Anal. 35 (2004), no. 6, 1394–1419.

[5] Delfour, Michel C.; Zolésio, Jean-Paul, *Oriented distance function and its evolution equation for initial sets with thin boundary.* SIAM J. Control Optim. 42 (2004), no. 6, 2286–2304.

[6] Federer, Herbert,*Curvature measures.* Trans. Amer. Math. Soc. 93 1959 418–491.

[7] Franchi, Bruno; Serapioni, Raul; Serra Cassano, Francesco,*Regular hypersurfaces, intrinsic perimeter and implicit function theorem in Carnot groups.* Comm. Anal. Geom. 11 (2003), no. 5, 909–944.

[8] Korányi, Adam, *Geometric properties of Heisenberg-type groups,* Adv. in Math. 56 (1985), no. 1, 28–38.

[9] Krantz, Steven G.; Parks, Harold R.,*Distance to C^k hypersurfaces.* J. Differential Equations 40 (1981), no. 1, 116–120.

[10] R.Monti, *Some properties of Carnot-Carathéodory balls in the Heisenberg group.* Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl. 11 (2000), no. 3, 155–167 (2001).

[11] Monti, Roberto; Serra Cassano, Francesco,*Surface measures in Carnot-Carathéodory spaces.* Calc. Var. Partial Differential Equations 13 (2001), no. 3, 339–376.

[12] Montgomery, Richard*A tour of subriemannian geometries, their geodesics and applications.* Mathematical Surveys and Monographs, 91. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002. xx+259 pp.

[13] Pansu, Pierre, *Une inégalité isopérimétrique sur le groupe de Heisenberg.* C. R. Acad. Sci. Paris S?r. I Math. 295 (1982), no. 2, 127–130.

[14] Pansu, Pierre,*Pansu, Pierre, Métriques de Carnot-Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un.* Ann. of Math. (2) 129 (1989), no. 1, 1–60.