

Mappe conformi.

Siano Ω, Ω' aperti in $\mathbb{C}$.

Una funzione conforme da

Ω a Ω' è una biiezione

normale $f: \Omega \rightarrow \Omega'$. In

essenza di informazioni sul

trasporto, diciamo che $f \in \text{Hol}(\Omega)$

è univalente se f è 1-1 in Ω .

Se f è univalente, $f'(z) \neq 0 \forall z \in \Omega$,

ma il viceversa non accade.

P.e.s. $f(z) = z^n$ ($n \geq 2$) ~~è univalente~~,

$f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, soddisfa $f'(z) \neq 0 \forall z$,

ma non è univalente.

$\{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0\} \subset \mathbb{C} \Rightarrow z \mapsto az+b$

è univalente
e ottone in $\mathbb{C}$.

(2) Più in generale, $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ $\neq 0$

$\Rightarrow z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ è univalente

in $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$

(3) $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2 \Rightarrow z \mapsto z^n$ è univalente in $\Omega^n = \{z = r e^{i\theta} \mid$

$\theta < \frac{\theta}{2\pi} < \theta + \frac{1}{n}\}$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$.

$\alpha < \frac{\theta}{2\pi} < \alpha + \frac{1}{n}$

Ω^n

f

0

0

(4) Lo stesso vale per $z \mapsto z^n$

con $n \in \mathbb{R}^+$. In tal caso,

occorre controllare nella definizione

di z^n .

$z^n = \exp(n \log z)$, occorre

quindi scegliere una determinata

ramificazione di $\log z$.

(5) $z \mapsto e^z$ è univalente

in $\Omega = \{z = x+iy \mid x < y < x+2\pi\}$,

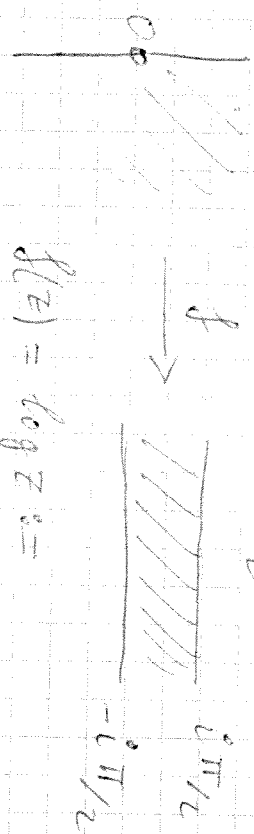
$\forall x \in \mathbb{R}$,

$i(x+2\pi)$

-2π

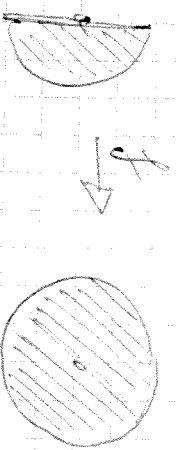
0

Esempio 16. $\Omega = \{z: \operatorname{Re} z > 0\} \xrightarrow{f} \Sigma_{\pi/2} =$
 $= \{z = x + iy: |y| < \frac{\pi}{2}\}$.



$$f(z) = \log z := \log |z| + i \arg \left(\frac{y}{x} \right)$$

(7) Esercizio: trovare una
 mappa conforme $f: \Omega \rightarrow \Delta$,
 $\Delta = \{z: |z| < 1, \operatorname{Re} z > 0\}$ e



Problema I. Dati Ω e Ω' ~~ovvero~~
 e partizioni α , esiste $f: \Omega \rightarrow \Omega'$
 conforme?

Problema II. Come dipende f
 dalla proprietà geometrica in
 Ω e Ω' ?

Principale prima in cose

$\Omega = \mathbb{D}$ che ci dà l'occasione di
 sapere qualcosa in più sulla
 funzione armonica.

$f \in \operatorname{Hol}(\mathbb{D})$ è detta intera.

locally estimate.

$$\left| f^{(n)}(z_0) \right| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=R} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \right|$$

$$\leq \frac{n!}{2\pi} \frac{M(f, z_0; R)}{R^n},$$

$$\text{dove } M(f, z_0; R) = \sup_{|z-z_0| \leq R} |f(z)|$$

Lemma 10 (Liouville) f intera

e limitata $\Rightarrow f$ costante

$$(\text{poichè } |f'(z_0)| \leq \frac{\|f\|_\infty}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad \forall z_0).$$

Lemma 2. $\mathbb{D}$ non è conforme

$$\text{a } \Delta = \{z: |z| < 1\}.$$

Lemma 3. $M(f, z_0; R) \leq C \cdot R^k \quad (k > 0)$

$\Rightarrow f$ è un polinomio di
 grado $m \leq k$.

Minimo sia $w_0 \notin \Omega$ fissato.

Sia $\Sigma = \{ \varphi \in H^1(\Omega), \varphi|_{\partial\Omega} = 1, \varphi(z) \in A \}$.

Obiettivo: mostrare che $\exists \varphi \in \Sigma$ Struttura.

(i) $\Sigma \neq \emptyset$.

Lemma. $\exists \varphi \in H^1(\Omega)$ t.c.

$$\varphi^2(z) = z - w_0$$

Dim. Lemma. Una funzione φ di tal forma

$$\varphi(z) = e^{\frac{1}{2} \log(z - w_0)}$$

Mostrare $\log(z - w_0)$ è una

Multivalorezione ed $\log a$ non è

Per esempio:

$$\log(z - w_0) = \int_{w_0}^z \frac{1}{s - w_0} - \log(a - w_0)$$

o
 $\left\{ \begin{array}{l} \text{non fissato;} \\ \text{(ii) } \log(a - w_0) \text{ è} \end{array} \right.$

Scelto ad arbitrio. (uso qui S.C.C.)

Lemma 4 (Teorema fondamentale dell'algebra). Se $P(z)$

è un polinomio di grado $m > 1$, allora $\exists z_0 \in \mathbb{C} : P(z_0) = 0$

quindi, $\exists z_1, \dots, z_m, a \in \mathbb{C} :$

$$P(z) = a \cdot (z - z_1) \cdot \dots \cdot (z - z_m)$$

Dim. Poiché $|P(z)| = |z|^m \cdot \frac{|P(z)|}{|z|^m} \rightarrow +\infty$ per $|z| \rightarrow +\infty$

se P non ha zeri in $\mathbb{C}$,

$$f(z) = \frac{1}{P(z)} \text{ è continua e}$$

$f(\infty) = 0$ limite, quindi costante

Teorema delle radici di Riemann

Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ semplicemente

connesso, $z_0 \in \Omega$. Esista (unica)

$$f : \Omega \rightarrow \Delta = \{ |z| < 1 \}$$

conforme t.c. $f(z_0) = 0$ e

$$f'(z_0) > 0.$$

Le funzione ψ è 1-1:

$$\psi(z) = \psi(w) \Rightarrow z = \psi(z)^{-1} = \psi(w)^{-1} = w$$

e per lo stesso motivo

$$\psi(z) \neq -\psi(w) \text{ se } z \neq w \in \Omega.$$

$$\psi(\Omega) \in \mathbb{D} \text{ è aperta:}$$

$$\exists B(a, r) \subseteq \psi(\Omega), \quad 0 < r < |a|.$$

$$\text{Sia } \psi(z) = \frac{r}{\psi(z) + a};$$

$$|\psi(z) + a| \geq r$$



$$|\psi(z)| \leq 1$$



$$\psi(\Omega) \subseteq \Delta$$

per open mapping.

Ma non può essere.

$$(c_1) \text{ se } \psi \in \Sigma, \quad \psi(\Omega) \not\subseteq \Delta, \quad z_0 \in \Omega$$

$$\Rightarrow \exists \psi_1 \in \Sigma: |\psi_1'(z_0)| > |\psi'(z_0)|.$$

Uso una mapp. di Möbius

per spostare il punto

$$\text{verificato in } 0: \quad z \xrightarrow{\psi} \Delta \xrightarrow{\varphi_a} \Delta$$

$$\varphi_a \circ \psi = \gamma_0: \psi(\Omega) \not\subseteq \mathbb{D}$$



$$\exists g \in \text{Hol}(\Omega, \mathbb{D}): g^2 = \gamma_0$$

g è 1-1 (vedi oltre sopra)

$$\text{e } g(\Omega) \subseteq \Delta \Rightarrow g \in \Sigma.$$

$$\text{Sia } \psi_1 = \varphi_b \circ g,$$

dove φ_b mapp. ~~di~~

$g(z_0)$ in 0:

$$\psi_1 \in \Sigma, \quad \psi_1(z_0) = 0.$$

$$\psi = \underbrace{\varphi_a^{-1} \circ \varphi_b}_{= F} \circ \psi_1$$

$$\Rightarrow \psi'(z_0) = F'(\psi_1(z_0)) \cdot \psi_1'(z_0)$$

$$= F'(c_1) \cdot \psi_1'(c_1)$$

$$\text{Dici: } F(a) \in \Delta, \quad F \neq \text{Id},$$

$$\text{For } F(a) \Rightarrow |F'(c_1)| < 1 \text{ per il}$$

Lemma di Schwarz.

~~PROVA~~

(iii) Fisso $z_0 \in \mathbb{R}$ e si

$$\eta = \sup \{ |\psi'(z_0)| : \psi \in \Sigma \}.$$

Se $\exists h \in \Sigma : |h'(z_0)| = \eta$,

siemens a posto.

(A) Σ è non vuoto

(B) Se $\Sigma \ni \psi_n : |\psi_n'(z_0)| \rightarrow \eta$,

allora una sotto successione ψ_{n_k} :

$$|\psi_{n_k}'(z_0)| \rightarrow \eta$$

$$\psi_{n_k} \rightarrow h \text{ local, } h \in \text{Hol}(\mathbb{R}).$$

$|h'(z_0)| = \eta$ chiaramente,

quindi h è non costante.

$$h(\mathbb{R}) \subset \bar{\Delta} \Rightarrow h(\mathbb{R}) \subset \Delta.$$

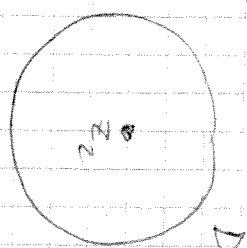
in ogni
aperta

$$(iV) \cdot h \bar{z} \equiv 1.$$

Si può $z_1 \neq z_2$ in $\mathbb{R}$,

$$\alpha = h(z_1) \neq \alpha_n = \psi_n(z_1)$$

z_1



Se $\bar{D} \in \mathbb{R}$ un disco chiuso in

centro z_2 , $z_1 \notin \bar{D}$,

$h - \alpha$ non ha zeri su ∂D

$\psi_n - \alpha_n \xrightarrow{n} h - \alpha$ unif. su $\bar{D}$.

$\psi_n - \alpha_n \mid \bar{D} \neq 0$ (però $1-1$ e

$$\psi_n(z_1) = 0)$$



$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{\psi_n'(z)}{\psi_n(z) - \alpha_n} dz$$

$$\xrightarrow{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{h'(z)}{h(z) - \alpha} dz$$

$$\Rightarrow h - \alpha \text{ non ha zeri}$$

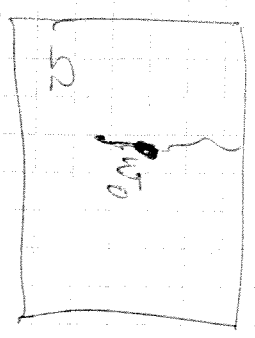
~~in~~ $\bar{D}$

$$\Rightarrow h(z_2) - h(z_1) \neq 0$$

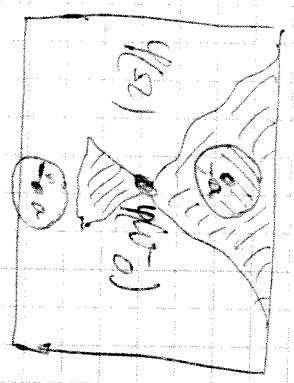


→ per ogni successione di n_i di
Teo. del Riemann per funzioni fuchsiane.

(i) $\Xi \neq \emptyset$



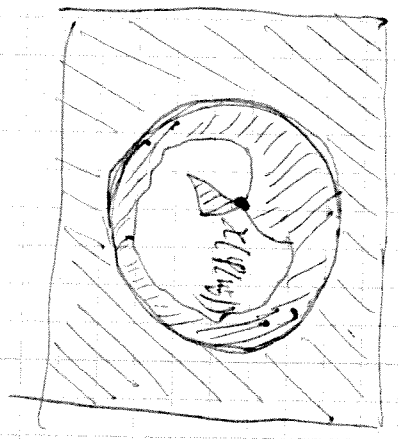
φ



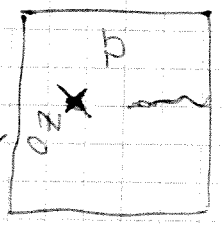
Use il fatto che $\mathbb{C} \setminus \varphi(\Xi)$
 ha interno $\neq \emptyset$ per invertire;

$W \xrightarrow{\chi} \frac{r}{q+w}$

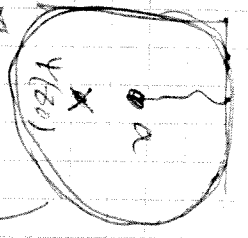
$-a \mapsto \infty$



(ii)

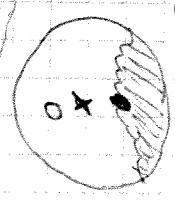
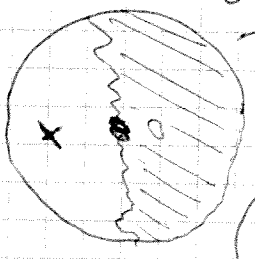


φ

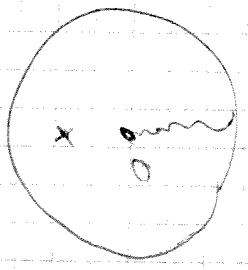


φ_a

φ_b



φ_b



$F = \varphi_a^{-1} \circ (\cdot)^2 \circ \varphi_b^{-1}$

riduce struttura

le distanze iperboliche $(\varphi_a^{-1} \circ \varphi_b^{-1})$
 le conservano) per il Lemma di
 Schwarz $\Rightarrow$ "la parte incidente
 gli disco" si "allargano"
 con $\varphi_a \circ \varphi_b \circ \varphi_b^{-1}$
 e diviene infinitesimo, $|F'(z)| < 1$.

compartimento al bordo.

$A \in \mathcal{A}$ è localmente connessa se $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{D} > 0$ t.c. $\forall \alpha, b \in A$ esiste un cammino B l.c. $a, b \in B \subseteq A$, $\text{diam}(B) < \varepsilon$.

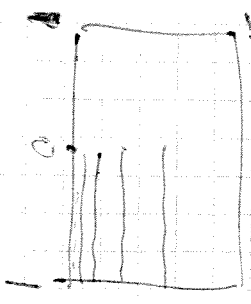
Esempio. $C \subseteq \mathbb{Q}$ è ~~connesso~~

compatt. e localmente connesso, e $f: C \rightarrow \mathbb{Q}$ è continua, allora $f(C)$ è localmente connesso.

Anche e viceversa in $\mathbb{Q}$ sono localmente connessi.

Controesempio.

Se $G = \{v + i w : 1 \leq w \leq 2\}$



$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{i}{2^n}, \frac{i}{2^{n+1}} \right] \Rightarrow$$

G (semplicemente) connesso, ma non localmente connesso.

ESERCIZIO: Dimostrare l'esempio.

Lemma. Sia $f: \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ continua, γ una curva semplice confor. I.S.S.E.:

(i) f si estende a una funzione continua su $\bar{D}$,

(ii) $\partial G = \varphi(\partial \Delta)$, con $\varphi \in \mathcal{A}(\partial \Delta, \mathbb{C})$

(de è una curva)

(iii) ∂G è localmente connesso

(iv) $G \setminus \partial G$ è localmente connesso.

Oss. (i) $\Rightarrow$ (ii) vale (localmente)

se f in portante era un omeomorfismo.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) per l'esercizio sopra.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) è problema topologico.

(iv) $\Rightarrow$ (i) non vale solo l'ipotesi che f sia omeomorfa in D .

ESERCIZIO. Trovare un omeomorfismo $f: \Delta \rightarrow \Delta$, suriettivo, che non estenda a una funzione continua $f: \bar{\Delta} \rightarrow \bar{\Delta}$.

ESERCIZIO. Trovare un omeomorfismo $f: \Delta \rightarrow \Delta$, suriettivo, che non estenda a una funzione continua $f: \bar{\Delta} \rightarrow \bar{\Delta}$.

ESERCIZIO. Trovare un omeomorfismo $f: \Delta \rightarrow \Delta$, suriettivo, che non estenda a una funzione continua $f: \bar{\Delta} \rightarrow \bar{\Delta}$.

ESERCIZIO. Trovare un omeomorfismo $f: \Delta \rightarrow \Delta$, suriettivo, che non estenda a una funzione continua $f: \bar{\Delta} \rightarrow \bar{\Delta}$.

ESERCIZIO. Trovare un omeomorfismo $f: \Delta \rightarrow \Delta$, suriettivo, che non estenda a una funzione continua $f: \bar{\Delta} \rightarrow \bar{\Delta}$.

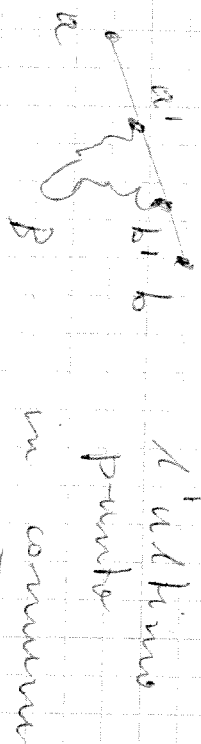
ESERCIZIO. Trovare un omeomorfismo $f: \Delta \rightarrow \Delta$, suriettivo, che non estenda a una funzione continua $f: \bar{\Delta} \rightarrow \bar{\Delta}$.

ESERCIZIO. Trovare un omeomorfismo $f: \Delta \rightarrow \Delta$, suriettivo, che non estenda a una funzione continua $f: \bar{\Delta} \rightarrow \bar{\Delta}$.

Dimo che (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\forall \varepsilon > 0$,
 se $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ si sceglie,

Si ha $a, b \in A \setminus \mathcal{C}$ e sup
 meno di $[a, b] \cap \bar{C} \neq \emptyset$

l'almeno i $\bar{C}$ benché, $|a - b| < \delta$
 siano $a', b' \in [a, b]$ il primo e



in comune
 con $\bar{C}$.

Allora $\exists B \ni a', b', B$ continuo, $B \subseteq \mathcal{C}$,
 diam(B) $< \varepsilon$ (se $\delta = \delta(\varepsilon)$).

Se poi $\delta < \varepsilon$, allora

$$B' = [a, a'] \cup B \cup [b', b] \subset \bar{C}$$

in continuo tra a, b e

$$\text{diam}(B') < 2\varepsilon.$$

Per mostrare che (iv) $\Rightarrow$ (i),

mostriamo prima che la
 mappa conformi ha una

una certa "non contrattibilità",

che in un senso puo' essere

che si dice che
 $|f'(z)|^2 dx dy = du dv$ che si
 chiama λ (area elementare).

Lemma. Sia $H \xrightarrow{h} \mathcal{C}$ conforme,

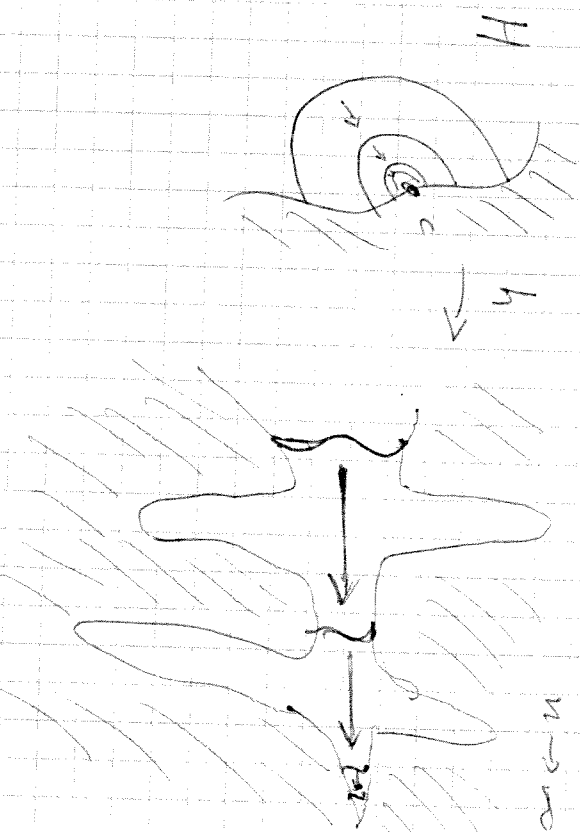
Si ha $C \in \mathcal{C}$, $C(H) = H \cap \partial \mathcal{C}$.

Allora $\forall \rho \in \mathcal{C}(H)$:

$$\inf_{\rho < \rho' \leq \rho} \text{length}(h(C(\rho))) \leq \frac{\sqrt{\text{top } \rho}}{2\pi R}.$$

Possiamo $\rho_n \rightarrow 0$, abbiamo che

$$\rho_n \rightarrow 0: \text{length}(h(C(\rho_n))) \rightarrow 0.$$



Altra del Lemma.

Sic $K(r) = \text{length}(h(C(r))) = \int |h'(e+re^{i\theta})| \cdot r d\theta$

$C(r) = \{e + re^{i\theta} \in H\}$

Alora,

$$\int_0^\infty K(r)^2 \frac{dr}{r} \leq \int_0^\infty 2\pi r^2 \int_{\{e+re^{i\theta} \in H\}} |h'(e+re^{i\theta})|^2 d\theta \cdot \frac{dr}{r}$$

Teichmüller - Schwarz

$$= 2\pi \int_H |h'|^2 dx dy = 2\pi \cdot \text{Area}(h(H))$$

$$\leq 2\pi^2 R^2 \text{ poiché } h(H) \in B(0, R).$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty K(r)^2 \frac{dr}{r} \leq 2\pi^2 R^2$$

$\forall$

$$\inf_{r < r^{1/2}} K(r)^2 \cdot \log \frac{r^{1/2}}{r} = \frac{1}{2} \log \frac{1}{r} \cdot \left(\inf_{r < r^{1/2}} K(r) \right)^2$$

L'idea delle dimostrazioni è

che se si ha qualche particolare $C(r)$

per cui un buon sistema

di punti,

inpongo $f(0) = 0$ spio $\in \mathbb{C}$

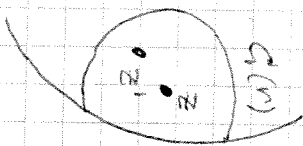
considero $R > R_0 > 0$.

$$B(0, R) \subseteq G \subseteq B(0, R).$$

Sic $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < R_0$, e sia $0 < \delta < \varepsilon$, $\delta = \delta(\varepsilon)$ nelle def. di hoc. coneste, con $A = D \setminus G$.

Scego poi $\rho \in (0, 1/4)$ "piccolo".

Siano $z, z' \in A$, $|z|, |z'| > 1/2$, $|z - z'| < \rho$



Siano $H = A$, $h = f$, $c = z$ nel Lemma.

$$\exists \rho \in (0, \rho^{1/2}) \subseteq (0, 1/2)$$

$$\text{length}(f(C(\rho))) \leq \frac{2\pi R}{\log(1/\rho)} < \delta < \varepsilon$$

Se ρ è scelto opportunamente,

$$\text{con } C(r) = A \cap \partial B(z, r).$$

Si mostra che

$$|f(z) - f(z')| < 2\varepsilon, \text{ f. unif.}$$

continua da A in $B(0, R)$, quindi

f si estende a $\bar{A}$ con continuità.

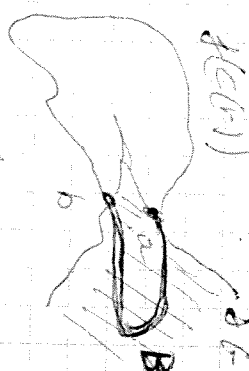
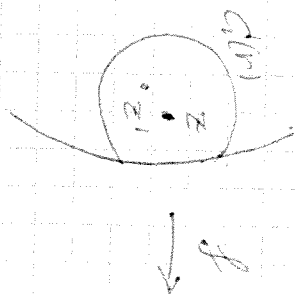
$$\{z_n\} \rightarrow e^{i\theta} \Rightarrow \{f(z_n)\} \text{ è Cauchy}$$

$$\Rightarrow \exists f(e^{i\theta}) = \lim_n f(z_n) \text{ in } \mathbb{C}.$$

Ne $\{z_n\}$ che tendono a $e^{i\theta}$ la continuità di f su $\bar{A}$.

1° caso: con $|f(z) - f(z')| \geq \epsilon$

per assurdo, e che $\overline{A} \cap \partial A \neq \emptyset$ (l'altro è più semplice).



2°

Allora, $\overline{f(A)}$ è una linea

con estremo $a, b \in \partial A$ [ESERCIZIO]

Dimostrato usando lunghezza $(f(\epsilon)) < \infty$, e mostrare che se $\text{length}(f(A)) = \infty$, non può non essere vero.

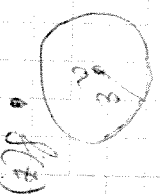
Poiché $|a-b| < \delta$, per HP. esiste un continuo B in $A \setminus \epsilon$ che congiunge a e b , tale che $\text{diam}(B) < \epsilon$.

Richiamo: $B \subseteq B(a, \epsilon)$, $f(B) \subseteq B(f(a), \epsilon)$ e

$0 \notin B(a, \epsilon)$ perché $|a| > R_0 > \epsilon$.

$\Rightarrow f(z)$ e $f(z')$ non è separato da

0 da $B \cup f(B)$:



Lemma di Janiszewski.

$A, B \subseteq \mathbb{C}$ chiusi, $A \cap B$ connesso.

Se a e b non sono separati da

A , né B , allora non sono separati da

$A \cup B$.

Esercizio (1) Dimostrato.

(2) Confermato in $\mathbb{R}^3$.

Supponiamo che $f(z)$ non sia separato

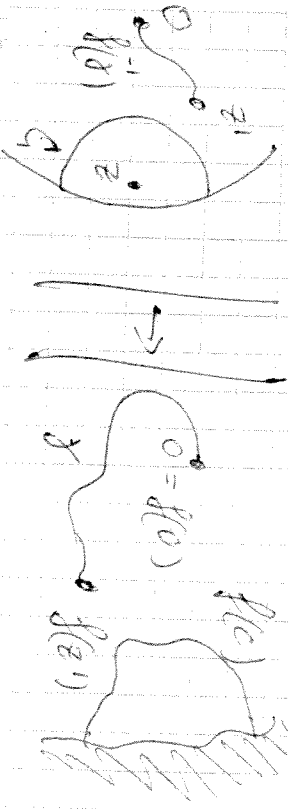
da 0 da $\overline{f(A)} \cup B$. $f(z)$ non è

separato da 0 da $A \setminus \epsilon$ ($0, f(z') \in A$)

e $(\overline{f(A)} \cup B) \cap (A \setminus \epsilon) = B$ e connesso

$\Rightarrow f(z')$ e $0 = f(0)$ non sono

separati da $f(A) \cup (A \setminus \epsilon)$.

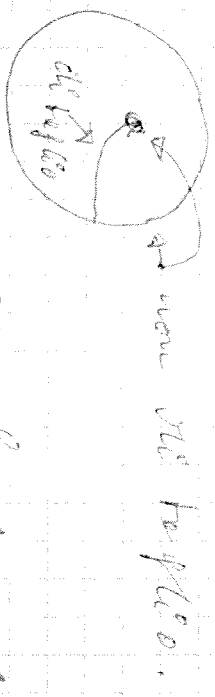


$\Rightarrow 0$ e z' non sono separati da

$(A \cup (A \setminus \epsilon)) \Rightarrow |z - z'| \geq r > \rho$, assurdo.

Lemma di Taglie.

$E \subseteq F$, E loco connesso, continuo, ~~conv~~
 $a \in E \cap \text{di taglio}$ se $E \setminus \{a\}$
 non è connesso.



Propositione. Sia $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$
 continua (semplice), $\partial\Delta$ loco connesso.
 Sia $a \in \partial\Delta$. Allora

$$A = f^{-1}(a) = \{s \in \Delta : f(s) = a\}$$

ha cardinalità $\#A \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ e

(1) a è di taglio $\Leftrightarrow \#A > 1$

(2) Δ componenti di $\partial\Delta \setminus \{a\}$

sono $f(I_k)$, dove gli archi I_k

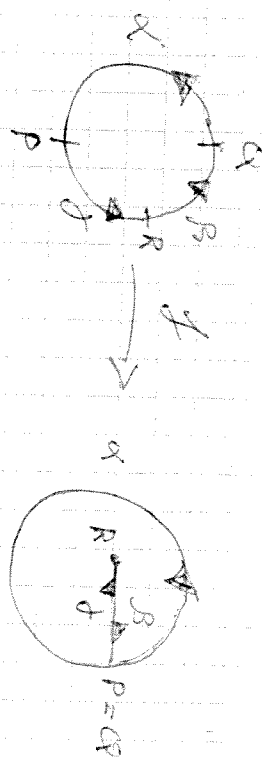
sono le componenti di $\partial\Delta \setminus A$.

Esercizio. Trovare δ sempre connesso

cioè $\partial\delta$ è loco connesso e $f|_{\partial\delta}$:

$f|_{\partial\delta}$ è non numerabile.

(divisione con $f|_{\partial\delta}$ infinita).



Lemma $f \in C(\Delta)$ e $f(\partial\Delta) = \partial\delta$,

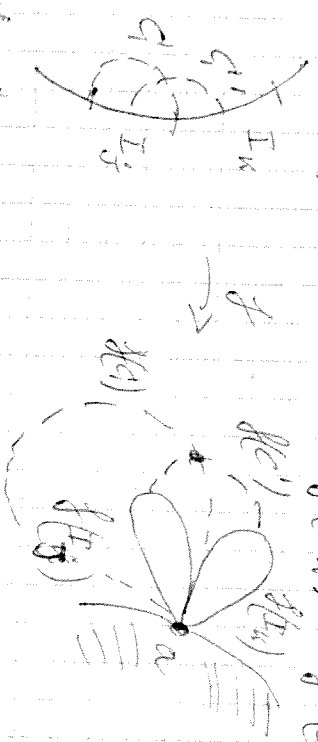
$$\Rightarrow \partial\delta \setminus \{a\} = f(\partial\Delta \setminus A) = \bigcup_k f(I_k).$$

Mostro che le $f(I_k)$ sono separate.

Ne segue che $\partial\delta \setminus \{a\}$ è connesso

$$\Leftrightarrow m=1.$$

Ma $a \neq 1$, considero $f(I_k)$ e $f(I_n)$



Sia q un arco di cerchio in Δ che

esiste in I_j^c . Allora, $f(q)$ è una

curva di Jordan $\Rightarrow \Delta \setminus f(q)$ ha

due componenti con bordo $f(q)$

Se c' è un arco di cerchio in I_j e

$f(c')$ è una curva c' da $f(I_j^c)$ a $f(I_n)$,
 che attraversa $\partial\delta$ angolo positivo
 $f(c')$ una sola volta $\Rightarrow \partial\delta \setminus \{a\}$

12

2

12



2