Esercizi sulle serie

Nicola Arcozzi

2007

(1) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la serie

$$\sum_1^\infty \frac{n^a + n^2}{n^{2a} + n^3} \cos(\pi n)$$

converge assolutamente?

Svolgimento. Osservo innanzitutto che $\cos(\pi n) = (-1)^n$, quindi che (per la convergenza assoluta) basta considerare la convergenza di $\sum_1^\infty \frac{n^a+n^2}{n^{2a}+n^3}$.

$$\frac{n^a + n^2}{n^{2a} + n^3} \sim \begin{cases} \frac{1}{n} \ se \ a < 3/2, \\ \frac{1}{n^{2a-2}} \ se \ 3/2 < a < 2, \\ \frac{1}{n^a} \ se \ a > 2. \end{cases}$$

Per $a = 3/2$ e $a = 2$ abbiamo stime simili, con coefficienti diversi. Per confronto, la serie converge assolutamente sse $a > 3/2$.

(2) Per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ converge la serie

$$\sum_1^\infty n^{\frac{a}{3}} \left(1 - e^{-\frac{1}{n^a}}\right)?$$

Svolgimento. Abbiamo le stime asintotiche:

$$1 - e^{-\frac{1}{n^a}} \overset{n\to\infty}{\sim} \begin{cases} 1 - e^{-1} \ se \ a = 0 \\ \frac{1}{n^a} \ se \ a > 0 \\ 1 \ se \ a < 0. \end{cases}$$

Per confronto, se $a \le 0$ la serie converge se e solo se converge $\sum_n n^{a/3}$, cioè se $\frac{a}{3} < -1$: $a < -3$. Sempre per confronto, se $a > 0$ la serie converge se e solo se converge

$$\sum_n \frac{n^{a/3}}{n^a} = \sum_n \frac{1}{n^{2/3 \cdot a}}.$$

Ciò accade esattamente quando $2/3 \cdot a > 1$, cioè $a > 3/2$.

In definitiva, la serie converge sse $a \in (-\infty, -3) \cup (3/2, +\infty)$.

(3) Consideriamo la serie

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{n}{n^a + n}.$$

Per quali valori di a converge assolutamente? Per quali vcalori di a converge?

Svolgimento. Sia $a_n = \frac{n}{n^a+n}$. Poichè la $|(-1)^n| = 1 \ \forall n$, se la serie converge allora $a_n \to 0$. Ora,

$$a_n \sim \begin{cases} \frac{1}{n^{a-1}} \ se \ a > 1, \\ 1 \ se \ a < 1, \\ 1/2 \ se \ a = 1. \end{cases}$$

Quindi, se $a \leq 1$, la serie diverge.

Considero la convergenza assoluta. Dalla stima asintotica per a_n segue che la serie converge assolutamente sse $a > 2$.

Considero ora la convergenza semplice (non assoluta), ipotizzando (ovviamente!) che $1 < a \leq 2$. In questo intervallo, $a_n \to 0$. So che la serie converge (essendo a segni alterni per la presenza di $(-1)^n$) se a_n è definitivamente decrescente.

Introduco la funzione

$$f(x) = \frac{x}{x^a + x}, \ x \in [1, +\infty).$$

Se mostro che $f'(x) \leq 0$ per $x \geq L$ ($L > 0$ qualunque), allora f decresce per $x \geq L$, quindi $a_{n+1} = f(n+1) \leq f(n) = a_n \ \forall n \geq L$, cioè, a_n è definitivamente decrescente.

Calcolo:

$$f'(x) = \frac{x - (a-1)x^a}{(x^a + x)^2}.$$

Il denominatore è positivo. Per il numeratore, ricordo che $a > 1$, quindi[1]

$$x - (a-1)x^a = x[1 - (a-1)x^{a-1}] \to -\infty \ per \ x \to +\infty.$$

Quindi (per il teorema della permanenza del segno) $f'(x)$ è negativo definitivamente, dunque f è definitivamente decrescente, in conclusione a_n è definitivamente decrescente.

La serie converge se $a > 1$, converge assolutamente se $a > 2$, diverge se $a \leq 1$.

[1] In questo caso potrei anche osservare che il numeratore è negativo sse $x > (a-1)^{-1/(a-1)}$, ma in serie più intricate è molto più facile calcolare il limite, come segue.