II PROVA PARZIALE DI ANALISI L-B
CdL Ingegneria Informatica (A-F) e dell'Automazione

17 marzo 2003 -201

(1) Sia γ la frontiera di D,

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ -\pi \leq x \leq \pi, \ 0 \leq y \leq 4 + \cos(x)\}$$

Sia f una funzione continua da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$.

(a) [1 punto] Scrivere una somma di integrali in una variabile che esprima $\int_\gamma f ds$.

(b) [2 punti] Quale dei seguenti numeri è uguale a $\int_\gamma f ds$ per la funzione

$$f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{1 + \sin^2(x)}}?$$

(i) $9 - 8\pi$, (ii) 0, (iii) $-9 + 8\pi$, (iv) $9 + 8\pi$

(2) Sia a un numero reale e sia F il campo vettoriale definito su tutto $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$,

$$F(x, y) = \left(3x^2 + 2x + y^2, 2axy + 3y^2\right)$$

(a) [1 punto] per quale dei seguenti valori di a il campo f è chiuso? Per quel/quei valori di a, F è conservativo?
(i) $a = 0$, (ii) $a = 1$, (iii) per ogni valore di a, (iv) $a = -1$

(b) [2 punti] Per i valori di a per cui F è conservativo, calcolarne un potenziale.

(3) Sia $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le y \le \pi, \ 0 \le x \le 4 + \cos(y)\}$. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua.

(a) [1 punto] Scrivere $\int_D f(x,y)dxdy$ in forma di integrali ripetuti.

(b) [2 punti] Quale dei seguenti numeri è $\int_D f(x,y)dxdy$ per la funzione $f(x,y) = \sin(y)x$?

(i) $\frac{49}{3}$, (ii) $\frac{7}{3}$, (iii) $\frac{5}{3}$, (iv) 2

(4) (a) [2 punti] Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$(*) \ y'' + 2y' + 2y = e^x$$

(b) [1 punto] Scrivere la soluzione del problema di Cauchy per $(*)$ con dati iniziali $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

(5) [2 punti] Per quali valori del parametro reale x converge la seguente serie?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2|x|^n + n^x}$$

(i) $x > 1$, (ii) $x < -1$ o $x > 1$, (iii) $1 < x < -1$, (iv) $x < 0$ o $x > 1$

(6) [5 punti]. **Esercizio facoltativo.** (a) Mostrare che, se $D \subset \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ soddisfa le ipotesi del teorema di Gauss-Green, allora

$$\int_{\partial D} \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy = 0$$

(questo fatto può essere confrontato con quanto visto a lezione, cioè che, se $D \subset \mathbb{R}^2$ soddisfa le ipotesi del teorema di Gauss-Green, allora

$$\int_{\partial D} -ydx + xdy = 2|D| \ ).$$

(b) Sia $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ -\pi \le x \le \pi, \ -1 \le y \le 1 + \cos(x)\}$. Dedurre da quanto verificato sopra il valore di

$$\int_{\partial E} \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

[**Suggerimento**: porre $D = E - B$, dove $B = B(0,r)$ è il disco con centro in $(0,0)$ e raggio r, r piccolo abbastanza affinchè B sia contenuto in E. Allora, $\int_{\partial D} = \int_{\partial E} - \int_{\partial B}$ (perchè?); uno di questi integrali si calcola facilmente, di un altro conosciamo il valore...].

Svolgere l'esercizio in un foglio a parte.

SOLUZIONI. (1) $\int_0^3 f(\pi,t)dt + \int_0^3 f(-\pi,t)dt + \int_{-\pi}^{\pi} f(t,0)dt + \int_{-\pi}^{\pi} f(t, 4+\cos(t))\sqrt{1+\sin^2(t)}dt$, (iv)

(2) (ii), $W = x^3 + x^2 + xy^2 + y^3 + k$

(3) $\int_0^{\pi} dy \int_0^{4+\cos(y)} dx \cdot f(x,y)$, (i)

(4) $y(x) = C_1 e^{-x}\cos(x) + C_2 e^{-x}\sin(x) + 1/5e^x$, $C_1 = 4/5$, $C_2 = 3/5$

(5) (ii)