II PROVA PARZIALE DI ANALISI L-B
CdL Ingegneria Informatica (A-F) e dell'Automazione

17 marzo 2003 - 202

(1) Sia γ la frontiera di D,

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ -\pi \leq x \leq \pi, \ 0 \leq y \leq 2 + \cos(x)\}$$

Sia f una funzione continua da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$.

(a) [1 punto] Scrivere una somma di integrali in una variabile che esprima $\int_\gamma f ds$.

(b) [2 punti] Quale dei seguenti numeri è uguale a $\int_\gamma f ds$ per la funzione

$$f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{1 + \sin^2(x)}}?$$

(i) $1 - 4\pi$, (ii) $-1 + 4\pi$, (iii) $1 + 4\pi$, (iv) $-1 - 4\pi$

(2) Sia a un numero reale e sia F il campo vettoriale definito su tutto $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$,

$$F(x, y) = \left(3x^2 - 2x + y^2, 2axy + 3y^2\right)$$

(a) [1 punto] per quale dei seguenti valori di a il campo f è chiuso? Per quel/quei valori di a, F è conservativo?

(i) $a = -1$, (ii) $a = 2$, (iv) $a = -2$, (iv) $a = 1$

(b) [2 punti] Per i valori di a per cui F è conservativo, calcolarne un potenziale.

(3) Sia $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq y \leq \pi, \ 0 \leq x \leq 2 + \cos(y)\}$. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua.

(a) [1 punto] Scrivere $\int_D f(x, y)dxdy$ in forma di integrali ripetuti.

(b) [2 punti] Quale dei seguenti numeri è $\int_D f(x, y)dxdy$ per la funzione $f(x, y) = \sin(y)x$?

(i) $\frac{13}{3}$, (ii) 1, (iii) $\frac{2}{3}$, (iv) $\frac{1}{3}$

(4) (a) [2 punti] Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$(*) \ 4y'' + 4y' + 2y = e^{-1/2 \cdot x}$$

(b) [1 punto] Scrivere la soluzione del problema di Cauchy per $(*)$ con dati iniziali $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

(5) [2 punti] Per quali valori del parametro reale x converge la seguente serie?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|x|^n + 2n^{2x}}$$

(i) $x < -1$ o $x > 1$, (ii) $x < 0$ o $x > 1/2$ (iii) $x < -1$ o $x > 1/2$ (iv) $x > 1/2$

(6) [5 punti]. **Esercizio facoltativo.** (a) Mostrare che, se $D \subset \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ soddisfa le ipotesi del teorema di Gauss-Green, allora

$$\int_{\partial D} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy = 0$$

(questo fatto può essere confrontato con quanto visto a lezione, cioè che, se $D \subset \mathbb{R}^2$ soddisfa le ipotesi del teorema di Gauss-Green, allora

$$\int_{\partial D} -ydx + xdy = 2|D| \ ).$$

(b) Sia $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ -\pi \leq x \leq \pi, \ -1 \leq y \leq 1 + \cos(x)\}$. Dedurre da quanto verificato sopra, il valore di

$$\int_{\partial E} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

[**Suggerimento**: porre $D = E - B$, dove $B = B(0, r)$ è il disco con centro in $(0, 0)$ e raggio r, r piccolo abbastanza affinchè B sia contenuto in E. Allora, $\int_{\partial D} = \int_{\partial E} - \int_{\partial B}$ (perchè?); uno di questi integrali si calcola facilmente, di un altro conosciamo il valore...].

Svolgere l'esercizio in un foglio a parte.

SOLUZIONI. (1) $\int_0^1 f(\pi, t)dt + \int_0^1 f(-\pi, t)dt + \int_{-\pi}^{\pi} f(t, 0)dt + \int_{-\pi}^{\pi} f(t, 2 + \cos(t))\sqrt{1 + \sin^2(t)}dt$, (iii)

(2) (iv), $W = x^3 - x^2 + xy^2 + y^3 + k$

(3) $\int_0^{\pi} dy \int_0^{2+\cos(y)} dx \cdot f(x, y)$, (i)

(4) $y(x) = C_1 e^{-x/2}\cos(x/2) + C_2 e^{-x/2}\sin(x/2) + e^{-x/2}$, $C_1 = 0$, $C_2 = 1$

(5) (iii)