

II PROVA PARZIALE DI ANALISI L-B
CdL Ingegneria Informatica (A-F) e
dell'Automazione

17 marzo 2003 - 203

(1) Sia γ la frontiera di D ,

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\pi \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 3 + \cos(x)\}$$

Sia f una funzione continua da \mathbb{R}^2 a \mathbb{R} .

(a) [1 punto] Scrivere una somma di integrali in una variabile che esprima $\int_{\gamma} f ds$.

(b) [2 punti] Quale dei seguenti numeri è uguale a $\int_{\gamma} f ds$ per la funzione

$$f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{1 + \sin^2(x)}}?$$

(i) $-4 + 6\pi$, (ii) $4 + 6\pi$, (iii) $4 - 6\pi$, (iv) $-4 - 6\pi$

(2) Sia a un numero reale e sia F il campo vettoriale definito su tutto $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$,

$$F(x, y) = (3x^2 + 2x - y^2, 2axy + 3y^2)$$

(a) [1 punto] per quale dei seguenti valori di a il campo f è chiuso? Per quel/quelli valori di a , F è conservativo?

(i) $a = 1$ (iv) $a = 2$, (ii) $a = -2$, (iii) $a = -1$

(b) [2 punti] Per i valori di a per cui F è conservativo, calcolarne un potenziale.

(3) Sia $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \pi, 0 \leq x \leq 3 + \cos(y)\}$. Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua.

(a) [1 punto] Scrivere $\int_D f(x, y) dx dy$ in forma di integrali ripetuti.

(b) [2 punti] Quale dei seguenti numeri è $\int_D f(x, y) dx dy$ per la funzione $f(x, y) = \sin(y)x$?

(i) $-\frac{1}{2}$, (ii) $\frac{1}{2}$, (iii) $-\frac{3}{2}$, (iv) $\frac{28}{3}$,

(4) (a) [2 punti] Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$(*) y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$$

(b) [1 punto] Scrivere la soluzione del problema di Cauchy per (*) con dati iniziali $y(0) = 1/4, y'(0) = 0$.

(5) [2 punti] Per quali valori del parametro reale x converge la seguente serie?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2|x|^{2n} + n^{2x}}$$

(i) $x < -1$ o $x > 1/2$, (ii) $x < 0$ o $x > 1/2$, (iii) $x > 1/2$, (iv) $x < -1$ o $x > 1$,

(6) [5 punti]. **Esercizio facoltativo.** (a) Mostrare che, se $D \subset \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ soddisfa le ipotesi del teorema di Gauss-Green, allora

$$\int_{\partial D} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy = 0$$

(questo fatto può essere confrontato con quanto visto a lezione, cioè che, se $D \subset \mathbb{R}^2$ soddisfa le ipotesi del teorema di Gauss-Green, allora

$$\int_{\partial D} -y dx + x dy = 2|D|).$$

(b) Sia $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\pi \leq x \leq \pi, -1 \leq y \leq 1 + \cos(x)\}$. Dedurre da quanto verificato sopra il valore di

$$\int_{\partial E} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

[**Suggerimento:** porre $D = E - B$, dove $B = B(0, r)$ è il disco con centro in $(0, 0)$ e raggio r , r piccolo abbastanza affinché B sia contenuto in E . Allora, $\int_{\partial D} = \int_{\partial E} - \int_{\partial B}$ (perchè?); uno di questi integrali si calcola facilmente, di un altro conosciamo il valore...].

Svolgere l'esercizio in un foglio a parte.

SOLUZIONI. (1) $\int_0^2 f(\pi, t)dt + \int_0^2 f(-\pi, t)dt + \int_{-\pi}^{\pi} f(t, 0)dt + \int_{-\pi}^{\pi} f(t, 4 + \cos(t))\sqrt{3 + \sin^2(t)}dt$, (ii)

(2) (iv), $W = x^3 + x^2 - xy^2 + y^3 + k$

(3) $\int_0^{\pi} dy \int_0^{3+\cos(y)} dx \cdot f(x, y)$, (iv)

(4) $y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-x} + 1/2 x^2 e^{-2x}$, $C_1 = 1/4$, $C_2 = 1/2$

(5) (i)