TEST DI PROVA 4

Nicola Arcozzi

Il punteggio attribuito agli esercizi é solo indicativo.

(1)[2pt] La disequazione:

$$|x+1| + |x-1| \geq |2x| \tag{1}$$

si risolve banalmente (perché?). Trovare le soluzioni di (1) e di

$$|x+1| + |x-1| > |2x|.$$

(2) [3pt] Quale delle seguenti affermazioni vale per ogni $x, y \in \mathbb{R} - \{0\}$?

(i) $x < y \implies \frac{1}{x} < \frac{1}{y}$.

(ii) Se x e y hanno segno diverso, allora $\frac{1}{x} < \frac{1}{y} \iff x < y$.

(iii) $x > y \implies \frac{1}{x} < \frac{1}{y}$.

(iv) $\frac{1}{x} < \frac{1}{y} \implies x > y$.

(3) [3pt] Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le funzioni

$$f(x) = 2^x, \ g(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Quale delle seguenti identitá é vera per ogni $x \in \mathbb{R}$?

(i) $f \circ g(x) = \frac{1}{1+2^{2x}}$.

(ii) $g \circ f(x) = 2^{\frac{1}{1+x^2}}$.

(iii) $g \circ f(x) = \frac{1}{1+2^{x^2}}$.

(iv) $g \circ f(x) = \frac{1}{1+2^{2x}}$.

(4) [5pt] Consideriamo i seguenti vettori in $\mathbb{R}^4$: $v_1 = (1,1,0,0)$, $v_2 = (1,-1,0,0)$, $v_3 = (0,0,1,1)$, e sia $V =< v_1, v_2, v_3 >$ il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ da loro generato. Trovare:

(i) $dim(V)$, la dimensione di V;

(ii) una ortonormale per V;

(iii) una base ortonormale per $V^\perp$, il complemento ortogonale di V in $\mathbb{R}^4$;

(iv) la proiezione del vettore $u = (a,b,c,d)$ su V e su $V^\perp$.

(5) [2pt] Siano $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ le funzioni lineari definite da $g(v) = Av$ ($v \in \mathbb{R}^2$) e $f(u) = Bu$ ($u \in \mathbb{R}^2$), con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Allora, clacolare $g \circ f(u)$, dove $u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

(6) [2pt] Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ le funzione lineare definita da $f(v) = Av$ ($v \in \mathbb{R}^2$),

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & -a \end{pmatrix},$$

dove $a \in \mathbb{R}$. Trovare a tale che l'equazione $f(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ non abbia soluzioni $u \in \mathbb{R}^2$.