TEST DI PROVA 5

Nicola Arcozzi

Il tempo a disposizione é di 1 ora e 30 minuti. Non si possono utilizzare calcolatrici grafiche. Non si possono utilizzare libri o appunti.

Il punteggio per gli esercizi a scelta multipla é di 3 pt. per la risposta esatta, -1 pt per una risposta errata, 0 pt. se la risposta non viene data. Negli esercizi a risposta libera non c'é punteggio negativo. Scrivete la risposta sul foglio degli esercizi, non su un foglio a parte.

Si viene ammessi alla seconda prova parziale scritta se (i) si provano almeno tre esercizi, (ii) si ottiene un punteggio di almeno 7 punti.

(1)[2pt] Risolvere la disequazione:

$$x^2 - |x| - 2 < 0. \tag{1}$$

(2) [3pt] Sia $a > 1$ e sia . Se

$$L = a^{\log_a(a^2)} a^{\log_a(a^3)} \text{ e } M = a^{\log_a(a^2)} a^{\log_a(a^3)},$$

allora

(i) $L = 6$.

(ii) $L = 5$.

(iii) $M = 6$.

(iv) M =5.

(3) [3pt] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Quale delle seguenti identitá é vera per ogni $x \in \mathbb{R}$?

(i) $f \circ f(x) = \frac{1}{1+2x}$.

(ii) $f \circ f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

(iii) $f \circ f(x) = \frac{1+x}{2+x}$.

(iv) $f \circ f(x) = \frac{2+x}{1+x}$.

(4) [5pt] Consideriamo i seguenti vettori in $\mathbb{R}^4$: $v_1 = (1,1,1,0)$, $v_2 = (1,-1,1,0)$, $v_3 = (0,0,0,1)$, e sia $V =< v_1, v_2, v_3 >$ il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ da loro generato. Trovare:

(i) $dim(V)$, la dimensione di V;

(ii) una ortonormale per V;

(iii) una base ortonormale per $V^\perp$, il complemento ortogonale di V in $\mathbb{R}^4$;

(iv) la proiezione del vettore $u = (a,b,c,d)$ su V e su $V^\perp$.

(5) [2pt] Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita da $f(v) = Av$ ($v \in \mathbb{R}^3$),

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix},$$

dove $a \in \mathbb{R}$. Trovare a tale che l'equazione $f(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ abbia infinite soluzioni.

(6) [2pt] Calcolare il limite di successioni

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + n^3}{3^n + n^2}.$$