TEST DI PROVA 8

Nicola Arcozzi

Esercizi per la prova scritta complessiva.

(1) [3pt] Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le funzioni

$$f(x) = x^2, \ g(x) = \frac{2}{x} + 1.$$

Quale delle seguenti identitá é vera per ogni $x \in \mathbb{R}$?

(i) $g \circ f(x) = \frac{2+x^2}{x^2}$.

(ii) $g \circ f(x) = \frac{4+4x+x^2}{x^2}$.

(iii) $g \circ f(x) = 2x^2 + 1$.

(iv) $g \circ f(x) = \frac{1}{2x^2+1}$.

(2) [3pt] Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita da $f(v) = Av$ ($v \in \mathbb{R}^3$),

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & a & 0 \\ a & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

dove $a \in \mathbb{R}$. Trovare tutti i valori di a per cui l'equazione vettoriale $f(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ non ha soluzioni.

(3) [3pt] Calcolare L,

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{3 \cdot 2^{2n} + 5 \cdot n^3}{7 \cdot 4^n + 11 \cdot n^3}.$$

(i) $L = 0$.

(ii) $L = +\infty$.

(iii) $L = \frac{3}{7}$.

(iv) $L = \frac{5}{11}$.

(4) [6pt] Consideriamo i seguenti vettori in $\mathbb{R}^4$: $v_1 = (1,1,0,0)$, $v_2 = (1,-1,0,0)$, $v_3 = (0,0,0,0)$, e sia $V =< v_1, v_2, v_3 >$ il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ da loro generato. Trovare:

(i) $dim(V)$, la dimensione di V;

(ii) una ortonormale per V;

(iii) una base ortonormale per $V^{\perp}$, il complemento ortogonale di V in $\mathbb{R}^4$;

(iv) la proiezione del vettore $u = (a, b, c, d)$ su V e su $V^{\perp}$.

Esercizi per la seconda prova scritta parziale e per la prova complessiva.

(5)[3 punti] Calcolare:

$$L = \lim_{x \to 0^+} \frac{1 - \cos(3x)}{x \cdot (e^{2x} - 1)}$$

(i) $L = 0$.

(ii) $L = +\infty$.

(iii) $L = \frac{9}{4}$.

(iv) $L = \frac{3}{4}$.

(6)[3 punti] Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{2ax} \text{ se } x < 1, \\ e^{a^2} x \text{ se } x \geq 1. \end{cases}$$

Per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ la funzione f é continua?

(i) $a = 0$.

(ii) $a = 2$.

(iii) $a = 0, 2$.

(iv) Per ogni valore di a.

(7)[3 punti] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile su tutto $\mathbb{R}$.
Sia ora $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cosídefinita:

$$h(x) = f(x + f(x)).$$

Calcolare $h'(1)$, sapendo che $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f'(1) = \pi$, $f'(2) = e$, $f'(3) = \log 2$.

(i) $h'(1) = \pi \log 2$.

(ii) $h'(1) = (1 + \pi) \log 2$.

(iii) $h'(1) = e \log 2$.

(iv) $h'(1) = e\pi$.

(8)[3 punti] Sia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e supponiamo che $f(0) = 1$ e $f(2) = 3$. Dalle ipotesi su f segue che

(i) $f(1) = 2$.

(ii) f é crescente in $[0, 2]$.

(iii) Esiste $x \in (0, 2)$ tale che $f'(x) = 1$.

(iv) Esiste $x \in (0, 2)$ tale che $f(x)^2 = 5$.

(9)[6 punti]Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = e^{-x^2+x}.$$

(a) Trovare gli intervalli su cui f é crescente.

(b) Trovare massimi e minimi relativi di f.

(c) Calcolare $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$.

(d) Trovare gli intervalli su cui la funzione f é convessa.

(e) Disegnare un grafico di f che tenga conto delle informazioni in (a),(b),(c), (d).