Test di prova II

February 5, 2003

(1) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^k$, $h(x) = f(x, g(x))$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Allora

(1) $n = 3, k = 1, m = 1$

(2) $n = 3, m = 1, k = 1$

(3) $n = 3, k = 3, m = 1$

(4) $n = 3, k = 1, m = 3$

(2) È data la funzione u definita su $\mathbb{R}^2$, $u(x, y) = e^{xy}(1 + x^2)$. Scrivere il gradiente di u nel punto (x, y). Scrivere, nel punto di coordinate $(\pi, \pi/4)$, l'equazione del piano tangente al grafico di u e il differenziale di u.

(3) Scrivere lo sviluppo di Taylor al secondo ordine nel punto di coordinate $(-2, 1)$ della funzione $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$$u(x, y) = (2x + 1)^4 - (x + y + 1)^4$$

(4) Trovare i punti critici di u e classificarli, dove

$$u(x, y) = x^3 - xy + x$$

è definita su tutto $\mathbb{R}^2$.

(5) Siano $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ e $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Sia $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la funzione definita da

$$h(x, y, z) = (f(x, y)g(z), g(x))$$

Scrivere $Jh(x, y, z)$.

(6) [1] Sia f la funzione definita da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^3$,

$$f(t) = (t, e^t, 1)$$

Calcolare $f'(t)$ e $\sqrt{|f'(t)|^2 + 1}$.

(7) (*Facoltativo.*) Sia $f(x, y) = xy$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Determinare $f(D)$, dove

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, \; x \geq -1/2\}$$

[1] parte di un esercizio più complesso.

Soluzioni. (1) $n = 3$, $m = 1$, $k = 1$. (2) differenziale: $du(\pi, \pi/4)(h, k) = e^{\pi^2/4}(\pi^3/4 + 9/4\pi)h + e^{\pi^2/4}(\pi^3 + \pi)k$; piano tangente $z - e^{\pi^2/4}(1 + \pi^2) = e^{\pi^2/4}(\pi^3/4 + 9/4\pi)(x - \pi) + e^{\pi^2/4}(\pi^3 + \pi)(y - \pi/4)$ (3) $u(-2 + h, 1 + k) = 81 - 216h + 216h^2 + o_{(h,h)\to 0}(h^2 + k^2)$ (4) $(0, 1)$, punto di sella. (5)

$$Jh(x, y, z) = \begin{bmatrix} \partial_x f(x, y)g(z) & \partial_y f(x, y)g(z) & f(x, y)g'(z) \\ g'(x) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(6) $f'(t) = (1, e^t, 0)$ (da pensare come vettore colonna); $\sqrt{1 + |f'(t)|^2} = \sqrt{2 + e^{2t}}$