Test di prova III

February 7, 2003

(1) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, $g:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^4$, $h(x)=g(x,f(x))$, $h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$. Allora

(1) $n=2, m=2, k=3$

(2) $n=3, m=4, k=2$

(3) $n=3, k=5, m=4$

(4) $n=2, k=5, m=2$

(2) È data la funzione u definita su $\mathbb{R}^2$, $u(x,y)=e^{-x^2}(1-y^2)$. Scrivere il gradiente di u nel punto (x,y). Scrivere, nel punto di coordinate $(1,0)$, l'equazione del piano tangente al grafico di u e il differenziale di u.

(3) Scrivere lo sviluppo di Taylor al secondo ordine nel punto di coordinate $(1,0)$ della funzione $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.

$$u(x,y)=e^{-x^2}(1-y^2)$$

(4) Trovare i punti critici di u e classificarli, dove

$$u(x,y)=e^{-x^2}(1-y^2)$$

è definita su tutto $\mathbb{R}^2$.

(5) Siano $f\in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ e $g\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Sia $h:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ la funzione definita da

$$h(x,y,z)=(f(y,z),f(y,x)+z)$$

Scrivere $Jh(x,y,z)$.

(6) Sia f la curva definita da $[-1,1]$ a $\mathbb{R}^3$,

$$f(t)=(\sqrt{2}t,t,e^t+e^{-t})$$

Calcolarne la lunghezza (scrivere l'integrale che esprime la lunghezza e calcolarlo).

(7) (*Facoltativo.*) Sia $f(x,y)=x^2+y^2$, $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. Determinare $f(D)$, dove

$$D=\{(x,y):x^2-1\le y\le 0\}$$

Soluzioni. (1) $n = 3$, $m = 4$, $k = 5$. (2) gradiente: $\nabla u(x,y) = (-2xe^{-x^2}(1-y^2), -2ye^{-x^2})$; differenziale: $du(0,1)(h,k) = -2e^{-1}h$; piano tangente $z - e^{-1}(1+\pi^2) = -2e^{-1}(x-1)$ (3) $u(1+h,k) = e^{-1} - 2e^{-1}h + e^{-1}h^2 - e^{-1}k^2 + o_{(h,k)\to 0}(h^2+k^2)$ (4) $(0,0)$, punto di massimo relativo. (5) Sia $f = f(u,v)$.

$$Jh(x,y,z) = \begin{bmatrix} 0 & \partial_u f(y,z) & \partial_v f(y,z) \\ \partial_v f(y,x) & \partial_u f(y,x) & 1 \end{bmatrix}$$

(6) $\int_0^1 \sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 2}\,dt = e - e^{-1}$