Test di prova IV

22 febbraio 2003

(1) Sia γ la frontiera di D,

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x + y \geq 0, \ x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Sia f una funzione continua da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$.

(a) Scrivere un integrale in una variabile che esprima $\int_\gamma f ds$.

(b) Quale dei seguenti numeri è uguale a $\int_\gamma f ds$ per la funzione

$$f(x, y) = xy?$$

(i) 0, (ii) $\frac{1}{6}$ (iii) $-\frac{1}{3}$, (iv) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}$.

(2) Sia A un numero reale e sia F il campo vettoriale definito su tutto $\mathbb{R}^2$,

$$F(x, y) = \left(\frac{Axy}{(x^2+1)^2}, \frac{1}{x^2+1} \right)$$

(a) per quale dei seguenti valori di A il campo f è chiuso?
(i) $A = 0$,(ii) $A = -2$, (iii) $A = 2$, (iv) $A = \frac{1+x^2}{xy}$

(b) per quel valore di A, il campo è conservativo? Se sì, calcolarne un potenziale.

SOLUZIONI. (1): (a) $\int_{-\pi/4}^{3/4\pi} f(\cos(t), \sin(t))dt + \sqrt{2} \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} f(t, -t)dt$; (b) (iii).

(2): (a) (ii); (b) i potenziali U di F in $\mathbb{R}^2$ sono le funzioni $U(x, y) = \frac{y}{1+x^2} + k$, $k \in \mathbb{R}$. Basta scriverne uno, per esempio $U(x, y) = \frac{y}{1+x^2}$ (corrispondente a $k = 0$).