# Test di prova V

22 febbraio 2003

**(1)** Sia $f$ una funzione continua da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}$. Sia $r$ la curva

$$r(t) = (e^t, t, \sin(t)), \ -\pi \le t \le \pi$$

e sia $\gamma$ il suo sostegno.

(a) Scrivere l'integrale in una variablile che esprime $\int_\gamma f ds$.

(b) Quale dei seguenti numeri è uguale a $\int_\gamma f ds$ per la funzione

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + 2 - \sin^2(y)}?$$

(i) $2\pi$, (ii) $3\pi + \frac{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}{2}$, (iii) $3\pi + \frac{e^2 - e^{-2}}{2}$, (iv) 4.

**(2)** Sia $A$ un numero reale e sia $F$ il campo vettoriale definito su tutto $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$,

$$F(x, y) = \left( \frac{Ay}{x^2 + y^2} + 1, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

(a) per quale dei seguenti valori di $A$ il campo $f$ è chiuso?
(i) $A = 1$,(ii) $A = -1$, (iii) $A = 2$, (iv) $A = -2$

(b) per quel valore di $A$, il campo è conservativo? Se sì, calcolarne un potenziale.

**(3)** Sia $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x \le 1, \ |y| \le x^2\}$. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua.

(a) Scrivere $\int_A f(x, y) dxdy$ in forma di integrali ripetuti.

(b) Quale dei seguenti numeri è $\int_A f(x, y) dxdy$ per la funzione $f(x, y) = xe^y$?

(i) $\frac{e+e^{-1}}{2} - 1$; (ii) $\frac{e^2+e^{-2}}{2} - 1$; (iii) $\frac{e-e^{-1}}{2}$; (iv) 0.

**SOLUZIONI. (1):** (a) $\int_{-\pi}^{\pi} f(e^t, t, \sin(t)) \sqrt{e^{2t} + 1 + \cos^2(t)} dt$; (b) (ii).

**(2):** (a) (ii); (b) le funzioni candidate a essere i potenziali $U$ di $F$ in $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ sono le funzioni $U(x, y) = \text{arctg}(y/x) + x + k$, $k \in \mathbb{R}$. Nessuna di esse è continua in $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, quindi il campo non è conservativo.

**(3):** (a) $\int_0^1 dx \int_{-x^2}^{x^2} f(x, y) dy$; (b) (i).