Test di prova V: esercizio sui campi

27 febbraio 2003

(2) Sia A un numero reale e sia F il campo vettoriale definito su tutto $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$,

$$F(x,y) = \left(\frac{Ay}{x^2+y^2} + 1, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

(a) per quale dei seguenti valori di A il campo f è chiuso?
(i) $A = 1$,(ii) $A = -1$, (iii) $A = 2$, (iv) $A = -2$

(b) per quel valore di A, il campo è conservativo? Se sì, calcolarne un potenziale.

SOLUZIONE.

(2): (a) (ii); (b) le funzioni candidate a essere i potenziali U di F in $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ sono le funzioni $U(x,y) = \operatorname{arctg}(y/x) + x + k$, $k \in \mathbb{R}$. Nessuna di esse è continua in $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, quindi il campo non è conservativo.

Mi è stato chiesto di svolgere questo esercizio in dettaglio. Calcolo le derivate di $F = (u,v)$:

$$\partial_y u(x,y) = \frac{A(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2},\ \partial_x v(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

quindi il camp F è chiuso se e solo se $A = -1$.

Il dominio di F, $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, non è semplicemente connesso [1], quindi la conservatività o meno di F deve essere stabilita senza ricorrere al Teorema di Poicarè. Per esempio, si può verificare direttamente se F ha un potenziale $W : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$.

Per trovare W, provo a integrare ($\int dx$ significa qui: *primitiva* rispetto alla variabile x).

$$\partial_x W(x,y) = u(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} + 1$$

[1] Richiamo la definizione. Un aperto A del piano è *semplicemente connesso* se e solo se il suo complementare è vuoto (nel qual caso $A = \mathbb{R}^2$) o connesso e illimitato. Nel nostro caso, $A = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, il suo complementare è $\mathbb{R}^2 - A = \{(0,0)\}$ non è vuoto, nè limitato, dunque A non era semplicemente connesso.

quindi, (usando la sostituzione $x = yt$, con y costante)

$$\begin{aligned} W(x,y) &= \int \left(\frac{-y}{x^2+y^2} + 1 \right) dx = x + \int \left(\frac{-y}{y^2t^2+y^2} \right) y dt \\ &= x - \int \frac{1}{1+t^2} dt = x - \operatorname{arctg}(t) + C(x) \\ &= x - \operatorname{arctg}(x/y) + C(x) = x + \operatorname{arctg}(y/x) + C(x) \end{aligned}$$

Importante: possiamo dire che la primitiva $W(x,y)$ di $u(x,y)|_{x=cost}$ è definita a meno di una costante $C = C(x)$ perchè, se $x \neq 0$, $u(x,y)$ è definita sull'intervallo $y \in (-\infty, +\infty)$. Se fosse definita sull'unione di più intervalli disgiunti, allora potrei scegliere in corrispondenza di quel valore di x diverse costanti, una per ogni intervallo.

Faccio lo stesso calcolo rispetto alla variabile y:

$$\partial_y W(x,y) = v(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

quindi, (usando la sostituzione $y = xt$, con x costante)

$$\begin{aligned} W(x,y) &= \int \frac{x}{x^2+y^2} dx = \int \left(\frac{x}{x^2+x^2t^2} \right) x dt \\ &= \int \frac{1}{1+t^2} dt = \operatorname{arctg}(t) + D(y) \\ &= \operatorname{arctg}(y/x) + D(y) \end{aligned}$$

Uguagliando le due espressioni per W, ottengo

$$\operatorname{arctg}(y/x) + D(y) = W(x,y) = \operatorname{arctg}(y/x) + C(x) + x$$

quindi, $D(x) = C(y)$, e ciò è possibile solo se $C(x)$ e $D(y)$ sono funzioni costanti e coincidenti (diciamo, $C(x) + x = D(y) = k \in \mathbb{R}$). (**Attenzione:** questi conti vanno bene per $x \neq 0$, per quel che riguarda $\partial_x W$, e $y \neq 0$, per quanto riguarda $\partial_y W$).

In conclusione, se il potenziale W esiste, deve essere

$$W(x,y) = \operatorname{arctg}(y/x) + x + k$$

Bene, questa funzione W non è continua, per nessun valore di k. Infatti, la funzione è discontinua nei punti $(0,y)$, $y \neq 0$. [2]. F **non è conservativo.**

Esiste un altro metodo, pìtrasparente dal punto di vista matematico e più significativo dal punto di vista fisico, per mostrare che il campo F non

[2] Basta mostrare la discontinuità in un punto, diciamo in $(0,1)$ Abbiamo che

$$\lim_{x\to 0^-} \operatorname{arctg}(1/x) + k = -\pi/2 + k \neq \pi/2 + k = \lim_{x\to 0^+} \operatorname{arctg}(1/x) + k$$

quindi W è discontinua in $(0,1)$.

è chiuso. Abbiamo enunciato un teorema secondo cui, se F è un campo conservativo in A con potenziale W e γ è una curva regolare $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$, allora il *lavoro di F lungo γ* dipende solo dagli estremi di γ,

$$\int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = W(r(b)) - W(r(a))$$

Visto che i nostri problemi sono legati a $(0, 0)$, proviamo a considerare una curva **chiusa** attorno all'origine. Sia $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Allora, tenuto conto che, per la nostra F,

$$F(\gamma(t)) = (-\sin(t) + 1, \cos(t))$$

$$\begin{aligned}
0 &= W(\gamma(2\pi)) - W(\gamma(0)) \\
&= \int_0^{2\pi} F(\cos(t), \sin(t)) \cdot (-\sin(t), \cos(t)) dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-\sin(t) + 1, \cos(t)) \cdot (-\sin(t), \cos(t)) dt \\
&= \int_0^{2\pi} (1 - \sin(t)) dt \\
&= 2\pi
\end{aligned}$$

Ciò non è proprio possibile, dunque F non può avere un potenziale, cioè, non è conservativo.