Test di prova VI

4 marzo 2003

(1) Sia γ la frontiera di D,

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 \leq x^3 \leq y \leq 1\}$$

Sia f una funzione continua da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$.
(a) Scrivere un integrale in una variabile che esprima $\int_\gamma f ds$.
(b) Quale dei seguenti numeri è uguale a $\int_\gamma f ds$ per la funzione

$$f(x,y) = y?$$

(i) 0, (ii) -2 (iii) 2, (iv) 1.

(2) Sia A un numero reale e sia F il campo vettoriale definito su tutto $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$,

$$F(x,y) = \left(Ax^2y + 2xy^2 + 1, x^3 + 2x^2y + 1\right)$$

(a) per quale dei seguenti valori di A il campo f è chiuso?
(i) $A = -3$,(ii) $A = 3$, (iii) $A = 0$, (iv) per ogni valore di A
(b) per quel valore di A, il campo è conservativo? Se sì, calcolarne un potenziale.

(3) Sia $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 \leq y^3 \leq x \leq 1\}$. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua.
(a) Scrivere $\int_A f(x,y)dxdy$ in forma di integrali ripetuti.
(b) Quale dei seguenti numeri è $\int_A f(x,y)dxdy$ per la funzione $f(x,y) = \frac{-2xy^2}{(1+x^2)^2}$?
(i) $1/3$; (ii) $\pi/6$; (iii) $1/3 + \pi/6$; (iv) $1/3 - \pi/6$.

(4) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$(*) \ y'' + 4y = 2sin(2x)$$

Scrivere la soluzione del problema di Cauchy per $(*)$ con dati iniziali $y(\pi) = 0$, $y'(\pi) = 1$.

Esercizio facoltativo. Calcolare (usando un metodo a piacere e giustificando la procedura utilizzata) l'integrale di linea

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy$$

dove $(P, Q) = (x^3 y + \sin(x), x^4 + y)$ e $D = \{(x, y) : \; x^4 + y^4 \leq 1, \; y \geq 0\}$.

SOLUZIONI. (1): (a) $\int_{-1}^{1} f(x, x^3)\sqrt{1 + 9x^4}dx + \int_{-1}^{1} f(x, 1)dx + \int_{-1}^{1} f(-1, y)dy$; (b) (iii).

(2): (a) (ii); (b)il campo F, per $A = 3$, è chiuso, $\mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso, quindi F è conservativo. I potenziali U di F in $\mathbb{R}^2$ sono le funzioni $U(x, y) = x^3 y + x^2 y^2 + x + y + k$, $k \in \mathbb{R}$.

(3): (a) $\int_{-1}^{1} dy \int_{y^3}^{1} f(x, y)dx$; (b) (iv).

(4): Integrale generale: $y(x) = C_1 \sin(2x) + C_2 \cos(2x) - 1/2x \cos(2x)$, soluzione del problema di Cauchy: $y(x) = 3/4 \sin(2x) + \pi/2 \cos(2x) - 1/2x \cos(2x)$