Test di prova VII

10 marzo 2003

(1) Sia γ la frontiera di D,

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}$$

Sia f una funzione continua da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$.

(a) Scrivere una somma di integrali in una variabile che esprima $\int_\gamma f ds$.

(b) Quale dei seguenti numeri è uguale a $\int_\gamma f ds$ per la funzione

$$f(x, y) = x + y?$$

(i) 0, (ii) $-\sqrt{2}/2$ (iii) $\frac{3}{2}\sqrt{2}$, (iv) $\sqrt{2}$.

(2) Sia A un numero reale e sia F il campo vettoriale definito su tutto $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$,

$$F(x, y) = \left(\frac{Ax}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

(a) per quale dei seguenti valori di A il campo f è chiuso?

(i) $A = 0$,(ii) $A = 1$, (iii) $A = -1$, (iv) per ogni valore di A

(b) per quale valore di A, il campo è conservativo? Per quel valore di A, in caso di risposta affermativa, calcolarne un potenziale.

(3) Sia $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}$. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua.

(a) Scrivere $\int_A f(x, y) dx dy$ in forma di integrali ripetuti.

(b) Quale dei seguenti numeri è $\int_A f(x, y) dx dy$ per la funzione $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$?

(i) 0; (ii) $\frac{\pi}{4}(e^{-1} - 1)$; (iii) $\frac{\pi}{4}(e^{-1} + 1)$; (iv) $\frac{\pi}{4}(1 - e^{-1})$.

(4) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$(*) \ y'' + 4y' + 4y = 0$$

Scrivere la soluzione del problema di Cauchy per $(*)$ con dati iniziali $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

(5) Per quali valori del parametro reale a converge la seguente serie?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+1)^n}{n^2+1}$$

(i) $-1 < a < 1$, (ii) $-1 \leq a \leq 1$, (iii) $-2 \leq a \leq 0$, (ii) $0 \leq a \leq 2$

Esercizio facoltativo. Calcolare (usando un metodo a piacere e giustificando la procedura utilizzata) l'integrale di linea

$$\int_{\partial D} P dx + Q dy$$

dove $(P, Q) = (x, -y)$ e $D = \{(x, y) : \ |y| \leq 1, \ y - 1 \leq x \leq \sqrt{1 - x^2}\}$.
Qualè l'area di D?

SOLUZIONI. (1): (a) $\int_{\pi/4}^{\frac{3}{4}\pi} f(\sin(t), \cos(t))dx + \int_0^{1/\sqrt{2}} f(x, x)\sqrt{2}dx + \int_{-1/\sqrt{2}}^{0} f(t, -t)\sqrt{2}dt$; (b) (iii).

(2): (a) (ii); (b) il campo F, per $A = 1$, è chiuso, $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ non è semplicemente connesso, quindi, per sapere se F è conservativo, devo mostrare che esiste o che non esiste un potenziale. I potenziali U di F in $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ sono le funzioni $U(x, y) = 1/2 \log(x^2 + y^2) + k$, $k \in \mathbb{R}$ (quindi, F è effettivamente conservativo).

(3): (a) $\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} dx \int_{|x|}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)dy$; (b) (iv).

(4): Integrale generale: $y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$, soluzione del problema di Cauchy: $y(x) = 2xe^{-2x}$

(5): (iii)

Esercizio facoltativo: conviene usare il Teorema di Green-Gauss.