Test di prova I

Nicola Arcozzi

September 30, 2003

Analisi Matematica L-A

(1) Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})^2$$

(i) 0, (ii) 1, (iii) ∞, (iv) 1/2, (v) 1/4

(2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per due successioni a valori reali $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$? (Ce ne sono due vere e tre false).

(i) Se $a_n \to 0$, allora $a_n b_n \to 0$

(ii) Se $a_n \to 0$, allora $1/a_n \to +\infty$

(iii) Se $a_n \to +\infty$, allora $1/a_n \to 0$

(iv) Se $a_n \to +\infty$ e b_n è limitata, allora $a_n b_n \to +\infty$

(v) Se $a_n \to +\infty$ e $b_n \geq 1/2$ definitivamente, allora $a_n \to +\infty$

Soluzioni. (1) (ii), (2) (iii) e (v)

Svolgimento. **(1)** Consideriamo i fattori separatamente, guardandoci bene dallo svolgere il quadrato.

$$\begin{aligned}
\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1} &= (\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} \\
&= \frac{2}{n^{1/2}}\frac{1}{\sqrt{1+n^{-1}}+\sqrt{1-n^{-1}}} \\
&\sim \frac{2}{2n^{1/2}} \\
&= n^{-1/2}
\end{aligned}$$

Quindi,

$$n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})^2 \quad \sim \quad n(n^{-1/2})^2 = 1 \to 1$$

(2) (i) è falsa. Per esempio, si considerino $a_n = 1/n$ e $b_n = n$: $a_n b_n = 1 \to 1 \neq 0$.

(ii) è falsa. Per esempio, $a_n = \frac{(-1)^n}{n} \to 0$, ma $1/a_n = (-1)^n n$ non ha limite (nè $+\infty$, nè $-\infty$).

(iii) è vera, per le proprietà algebriche dei limiti in $\mathbb{R}^*$.

(iv) è falsa. Per esempio, se $a_n = n$ e $b_n = (-1)^n$, allora $a_n b_n = (-1)^n n$, considerata in (ii), che non ha limite.

(v) è vera. Fissiamo $R > 0$, qualunque. Poichè $a_n \to +\infty$, $a_n \geq 2R$ definitivamente, ma anche $b_n \geq 1/2$ definitivamente, quindi $a_n b_n \geq (2R)1/2 = R$, definitivamente.