Test di prova X: soluzioni

Nicola Arcozzi, Analisi Matematica L-A

December 3, 2003

(1) $[-1, 0]$ e $[1, \infty)$.

(2) (ii).

(3) Dominio: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$. Ci sono asintoti verticali in $x = 1$ e $x = -1$ (dove $f(x) \to -\infty$). Per $x \to \infty$, c'è l'asisntoto $y = 2x$, per $x \to -\infty$, c'è l'asisntoto $y = -2x$.

(4) $2(3 + 5e^{x^2} + e^{2x^2})^{1/2} = 2\sqrt{3 + 5e^{x^2} + e^{2x^2}}$.

(5) $-\frac{25}{81}\cosh(1) - \frac{2}{81}\sinh(1) + \frac{1}{3}$.

Facoltativo. f è continua su tutto $\mathbb{R}$, in quanto ottenuta da funzioni continue mediante composizioni, somme e prodotti. I limiti agli estremi del dominio di f sono $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$.

Sicuramente è derivabile per $x \neq 0, -1$. Calcolo la derivata in questi punti:

$$f'(x) = sign(x+1)e^{|x|}(1 + (x+1)sign(x))$$

Calcolo i limiti per $x \to 0^+$ e $x \to 0^-$, che sono rispettivamente 2 e 0. La funzione non è derivabile per $x = 0$. Calcolo i limiti per $x \to -1^+$ e $x \to -1^-$, che sono rispettivamente e e $-e$. La funzione non è derivabile per $x = -1$. Quindi, la funzione è derivabile in $\mathbb{R} - \{0, -1\}$.

$f'(x) \geq 0$ quando $x > 0$ o quando $-1 \leq x < 0$. La funzione è quindi crescente su $[-1, \infty)$ e decrescente su $(-\infty, -1]$.

Calcolo

$$f''(x) = sign(x+1)e^{|x|}(x + 1 + 2sign(x))$$

Gli intervalli su cui f'' è maggiore o uguale di 0 sono $(0, +\infty)$ e $(-\infty, -1)$. Su questi intervalli, la funzione è convessa (secondo la nostra definizione). La funzione è concava in $(-1, 0)$. f non ha punti di flesso.[1]

[1] Si può mostrare che la funzione è "convessa per corde" su $[0, +\infty)$ e $(-\infty, -1]$, e che è concava per corde su $[-1, 0]$.