# Test di prova II

Nicola Arcozzi

September 30, 2003

Analisi Matematica L-A

(1) Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty} \left(3^n - 2^{2n} + n^4\right) \frac{\log(n)}{3 \cdot 4^n + \log(n)}$$

(i) 0, (ii) il limite non esiste in $\mathbb{R}^*$, (iii) $-\infty$, (iv) $+\infty$, (v) $-1/3$

(2) Quale delle seguenti affermazioni è vera per due successioni a valori reali $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$?

(i) Se $b_n \sim a_n \sim 1/n$, allora $a_n - 1/n \sim b_n - 1/n$

(ii) Se $a_n = o(n)$, allora $\{a_n\}$ è una successione limitata

(iii) Se $a_n = o(n^2)$, allora $a_n = o(n)$

(iv) Se $a_n \to 1$ e $b_n$ è limitata, allora $a_n b_n$ converge

(v) Se $a_n = o(n)$, allora $a_n = o(n^2)$

**Soluzioni.** (1) (iii), (2) (v)

**Svolgimento.** **(1)** Consideriamo i fattori separatamente. Si verifica facilmente che

$$3^n - 2^{2n} + n^4 \sim -4^n,$$
$$3 \cdot 4^n + \log(n) \sim 3 \cdot 4^n$$

quindi,

$$\left(3^n - 2^{2n} + n^4\right) \frac{\log(n)}{3 \cdot 4^n + \log(n)} \sim -\frac{\log(n)}{3} \to -\infty$$

**(2)** (i) è falsa. Per esempio, $a_n = 1/n + 1/n^2$ e $b_n = 1/n + 1/n_3$: $a_n - 1/n = 1/n^2 \not\sim 1/n^3 = b_n - 1/n$.

(ii) è falsa. Per esempio, $a_n = \sqrt{n} = o(n)$ (poichè $\sqrt{(}n)/n \to 0$), ma $\{a_n\}$ non è limitata.

(iii) è falsa: si consideri $a_n = n$

(iv) è falsa. Per esempio, se $a_n = 1$ (successione costante) e $b_n = (-1)^n$: $a_n b_n = (-1)^n$ non è convergente.

(v) è vera.$a_n = o(n)$ significa che $a_n/n \to 0$. Quindi,$a_n/n^2 = (a_n/n)(1/n) \to 0$, cioè, $a_n = o(n^2)$. (Un altro modo di mostrare la stessa cosa è: $a_n = o(n)$ per ipotesi, $n = o(n^2)$ per calcolo diretto, quindi, per una proprietà che abbiamo visto, $a_n = o(n^2)$).