Test di prova III

Nicola Arcozzi

October 3, 2003

Analisi Matematica L-A

(1) Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}\sqrt{2+1/n}(\sqrt{4^n+n}-2^n)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}$$

(i) 0, (ii) 1, (iii) ∞, (iv) $\sqrt{2}$, (v) $\sqrt{2}/2$

(2) Sia $f:(0,2]\to\mathbb{R}$ una funzione continua. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(i) Se $a_n \to 0$,$\{a_n\}$ essendo una successione in $(0,2]$, allora esiste in $\mathbb{R}^*$ $\lim_{n\to\infty} f(a_n)$

(ii) Esiste $\lim_{x\to 0^-} f(x)$

(iii) Esiste $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

(iv) Se $a_n \to 3/2$, allora esiste in $\mathbb{R}^*$ $\lim_{n\to\infty} f(a_n)$

(v) Non esiste $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

Soluzioni. (1) (v), (2) (iv)

Svolgimento. **(1)** Abbiamo un'indeterminazione del tipo $\infty - \infty$ al numeratore, e fattori che tendono a $+\infty$ a numeratore e denominatore. Consideriamo i fattori separatamente. $2^{n+1} = 2 \times 2^n$ al numeratore è di per sè abbastanza semplice.

$$\sqrt{2 + 1/n} \to \sqrt{2},$$

questo fattore non ci dà problemi.

$$\begin{aligned}
\sqrt{4^n + n} - 2^n &= (\sqrt{4^n + n} - 2^n)\frac{\sqrt{4^n + n} + 2^n}{\sqrt{4^n + n} + 2^n} \\
&= \frac{n}{\sqrt{4^n + n} + 2^n} \\
&= \frac{n}{2^n(\sqrt{1 + n \times 2^{-n}} + 1)} \\
&\sim \frac{n}{2 \times 2^n}
\end{aligned}$$

Il denominatore **non** è della forma $\infty - \infty$,

$$\begin{aligned}
\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 - 1} &= n(\sqrt{1 + 1/n^2} + \sqrt{1 - 1/n^2}) \\
&\sim 2n
\end{aligned}$$

Mettendo insieme tutti i pezzi,

$$\frac{2^{n+1}\sqrt{2 + 1/n}(\sqrt{4^n + n} - 2^n)}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 - 1}} \sim \frac{2 \times 2^n \times \sqrt{2} \times n}{2n \times 2 \times 2^n} \to \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(2) (i) e (iii) sono false perchè non sappiamo nulla sul comportamento di f in un intorno di 0. Si consideri, ad esempio, la funzione $f(x) = \sin(1/x)$, che non ha limite, per $x \to 0^+$, neanche in $\mathbb{R}^*$. Per lo stesso motivo, non è vera (v) (si prenda $f(x) = x$, per cui il limite esiste). Il limite in (ii) non è neanche definito, poichè f non è definita in un intorno sinistro di 0.

(iv) vale, perchè la funzione f è continua in $3/2$, quindi esiste in $\mathbb{R}$ il $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(3/2)$: esiste in $\mathbb{R}$, esiste quindi a maggior ragione in $\mathbb{R}^*$.