

Test di prova V

Nicola Arcozzi

October 21, 2003

Analisi Matematica L-A

(1) Calcolare il seguente limite di successioni

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/4} \sin\left(\frac{2n}{n+10}\right) \sqrt{\sqrt{n+10} - \sqrt{n}}$$

(i) 0, (ii) $+\infty$, (iii) $\sin(2)$, (iv) $\sqrt{5} \sin(2)$, (v) $5 \sin 2$

(2) Sia $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Quale delle seguenti affermazioni è necessariamente vera?

- (i) f ha massimo in $(a, b]$.
- (ii) Per ogni successione $\{x_n\}$ in $(a, b]$ tale che $x_n \rightarrow a$, $f(x_n) \rightarrow f(a)$.
- (iii) Per ogni successione $\{x_n\}$ in (a, b) tale che $x_n \rightarrow b$, $f(x_n) \rightarrow f(b)$.
- (iv) f non ha massimo in $(a, b]$.
- (v) Esiste in \mathbb{R}^* il $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.

(3) Calcolare il seguente limite di funzioni

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{x^2 + 4x - 12}{x^2 + x - 6}$$

(i) $+\infty$, (ii) $-\infty$, (iii) 0, (iv) $e^{\sqrt{2}} \cdot \frac{8}{5}$, (v) $\frac{8}{5}$, (vi) $e \cdot \frac{4\sqrt{2}}{5}$,

(4) Sia $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{x^2}$. Calcolare $f'(e)$.

(5) Siano $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni derivabili su tutto \mathbb{R} . Se

$$g(x) = e^{f(x)^2}$$

e se $f(3) = 5$ e $f'(3) = k$, quali delle seguenti è certamente vera?

(i) $g'(5) = 10e^{25}k$;

(ii) $g'(5) = 2e^{25}k$;

(iii) $g'(5) = 6e^9k$;

(iv) $g'(3) = 10e^{25}k$;

(v) $g'(3) = 2e^{25}k$.

Esercizio facoltativo. Sia f la funzione da $(-1, 4)$ a \mathbb{R} definita da

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x < 1 \\ \cos(\pi(x-1)) & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

f è una funzione continua? Spiegare esaurientemente la propria risposta, motivando ogni affermazione.

Soluzioni. (1) (iv), (2) (iii), (3) (iv), (4) $3e \cdot e^{e^2} = 3 \cdot e^{e^2+1}$, (5) (iv).