Test di prova VI

Nicola Arcozzi

October 27, 2003

Analisi Matematica L-A

(1) Calcolare il seguente limite di successioni

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/6}\left(\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{2n+2}-\sqrt{2n-1}}\right)^{1/3}$$

(i) 0, (ii) $+\infty$, (iii) $(8/9)^{1/6}$, (iv) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$, (v) $(8/9)^{1/3}$

(2) Sia $f : (3,5] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Quale delle seguenti affermazioni è necessariamente vera?

(i) f ha massimo in $[3,5)$.

(ii) Per ogni successione $\{x_n\}$ in $[3,5)-\{4\}$ tale che $x_n \to 4$, $f(x_n) \to f(4)$.

(iii) Per ogni successione $\{x_n\}$ in $(3,5)$ tale che $x_n \to 3$, $f(x_n) \to f(3)$.

(iv) f non ha massimo in $[3,5)$.

(v) Per ogni successione $\{x_n\}$ in $[3,5)-\{4\}$ tale che $x_n \to 4$, $f(x_n) \to 4$.

(3) Calcolare il seguente limite di funzioni

$$\lim_{x\to 1^-} e^{x^2}\cdot\frac{x-4\sqrt{x}+3}{x-5\sqrt{x}+4}$$

(i) $+\infty$, (ii) $-\infty$, (iii) 0, (iv) $e\cdot\frac{2}{3}$, (v) $\frac{2}{3}$, (vi) $e\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$,

(4) Sia $f : [-\pi/4, \pi/4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x)^{e^x}$. Calcolare $f'(0)$.

(5) Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili su tutto $\mathbb{R}$. Se

$$g(x) = f(f(x))$$

e se $f(1) = 2$, $f'(1) = 3$, $f'(2) = 5$, $f'(3) = 7$ quali delle seguenti è certamente vera?

(i) $g'(1) = 35$;

(ii) $g'(1) = 21$;

(iii) $g'(1) = 15$;

(iv) $g'(2) = 15$;

(v) $g'(2) = 21$.

Esercizio facoltativo. Sia f la funzione da $(-1, 4)$ a $\mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x < -1 \\ x \text{ se } x \geq -1 \end{cases}$$

f è una funzione continua? Spiegare esaustivamente la propria risposta, motivando ogni affermazione.

Soluzioni. (1) (ii), (2) (ii), (3) (iv), (4) 1, (5) (iii).