Test di prova VIII

Nicola Arcozzi

November 12, 2003

Analisi Matematica L-A

(1) Determinare gli intervalli su cui la funzione f è crescente,

$$f(x) = (x^2 - 3|x| + 2)e^x$$

(2) Calcolare il seguente limite,

$$\lim_{x \to 0^+} e^{\cos(\pi + x)} \frac{x^2 e^x - \log(1 + x^2)}{x \sin(x) \sinh(x)}$$

(3) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = x \arctan(x)$$

Calcolare i limiti $m^+ = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$, $m^- = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$. Poi, calcolare, se esistono, $q^+ = \lim_{x \to +\infty} f(x) - m^+ x$ e $q^- = \lim_{x \to -\infty} f(x) - m^- x$.

(Le rette $y = m^+ x + q^+$ e $y = m^+ x + q^+$ sono, rispettivamente, gli *asintoti (obliqui) di f per x che tende a ∞ e a $-\infty$*).

Facoltativo. Sia $f : [-2\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = |x| \cos(x) - \sin|x|$$

Determinare gli insiemi su cui la funzione f è, rispettivamente, continua e derivabile. (Suggerimenti: calcolare l'eventuale derivata in $x = 0$ usando la definizione e tenere conto del fatto che $x \mapsto \cos(x)$ è una funzione pari). Trovare massimi e minimi relativi di f, e gli intervalli su cui è crescente o decrescente. Calcolare $f(2\pi)$, $f(-2\pi)$, e tracciare un grafico approssimativo della funzione.

Soluzioni.

(1) $(-\infty, \frac{-5-\sqrt{5}}{2}]$, $[\frac{-5+\sqrt{5}}{2}, 0]$, $[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$.

Nota importante: sarebbe sbagliatissimo scrivere che la funzione è crescente su $(-\infty, \frac{-5-\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{-5+\sqrt{5}}{2}, 0] \cup [\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$!

(2) 1.

(3) Suggerimento per $q^{\pm}$: scrivere in forma di rapporto e usare de l'Hospital. $m^+ = \pi/2$, $m^- = \pi/2$, $q^+ = q^- = -1$.Gli asintoti sono $y = \pi/2x - 1$ (a $+\infty$) e $y = -\pi/2x - 1$ (a $-\infty$).