Test di prova IX

Nicola Arcozzi

November 20, 2003

Analisi Matematica L-A

(1) Determinare gli intervalli su cui la funzione f è crescente,

$$f(x) = \log\left(\frac{e^{2x}+1}{e^x+2}\right)$$

(Suggerimento: a un certo punto nei calcoli, vi sarà forse vantaggioso porre $t = e^x$, e fare attenzione al fatto che $e^x > 0$ per ogni x).

(2) Calcolare il seguente limite,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2)(e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos(x))}{\cos^3(2x)\sin^6(2x)}$$

(3) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^5 - x}{x^3+1}}$$

Calcolare il dominio e gli eventuali asintoti (obliqui, orizzontali, verticali) di f.

Facoltativo. Sia f la funzione

$$f(x) = e^{|x|}|x+1|$$

Determinare gli insiemi su cui la funzione f è, rispettivamente, continua e derivabile. Trovare massimi e minimi relativi di f, e gli intervalli su cui è crescente o decrescente.Trovare i limiti di f agli estremi del dominio. Trovare gli intervalli su cui f è, rispettivamente, concava e convessa. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.

Soluzioni. (1) La funzione è crescente in $[\log(\sqrt{5}-2)+\infty)$, decrescente in $(-\infty, \log(\sqrt{5}-2)]$ e ha un punto di minimo relativo (in realtà, un punto di minimo) per $x = \log(\sqrt{5}-2)$.

(2) $3^{-1}2^{-8}$.

(3) Dominio: $(-\infty,-1)\cup(-1,0]\cup[1,+\infty)$. Ci sono solo asintoti obliqui: per $x \to +\infty$, $y = x$; per $x \to -\infty$, $y = -x$.

Esercizio facoltativo. La funzione f è (ben definita e) continua su tutto $\mathbb{R}$ (f è ottenuta da funzioni continue tramite somme, moltiplicazioni e composizioni). I limiti di f agli estremi del dominio sono $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. Poichè $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$, f non ha asintoti.

f è certamente derivabile su $\mathbb{R} - \{0,-1\}$. Per questi due ultimi punti, ci basta calcolare la derivata di f per $x \neq 0, -1$,

$$f'(x) = e^{|x|}(sign(x+1)+|x+1|\ sign(x)) = sign(x+1)e^{|x|}(1+(x+1)\ sign(x))$$

Le derivate destre e sinistre che ci interessano sono

$$f'_+(0) = 2 \neq 0 = f'_-(0),\ \ f'_+(-1) = e \neq -e = f'_-(-1),$$

quindi la funzione è derivabile solo in $\mathbb{R} - \{0,-1\}$.

Possiamo adesso calcolare gli intervalli su cui f è crescente. $f' > 0$ se

$$(i)\ \begin{cases} x > 0 \\ sign(x+1)(x+2) > 0 \end{cases}$$

o se

$$(ii)\ \begin{cases} x < 0 \\ sign(x+1)(-x) > 0 \end{cases}$$

Risolvendo i sistemi di disequazioni (i) e (ii), e tenendo conto della continuità di f, abbiamo che f è crescente su $[-1,+\infty)$, decrescente su $(-\infty,-1]$ e ha un punto di minimo relativo (in realtà, un punto di minimo) per $x = -1$.

Per studiare la convessità della funzione, calcoliamo la derivata seconda (per $x \neq 0, -1$),

$$f''(x) = sign(x+1)e^{|x|}(x+1+2sign(x))$$

Ragionando come sopra, abbiamo che la funzione è convessa negli intervalli $(0,+\infty)$ e $(-\infty,-1)$, mentre è concava in $(-1,0)$. (Per avere un'idea del garfico, suggerisco il plot nell'intervallo $[-1.2, 0.2]$, che contiene i "punti interessanti"). [1]

[1] La funzione è "convessa per corde" in $[0,+\infty]$ e $[-\infty,-1]$, ed è "concava per corde" in $[-1,0]$.