TEST DI PROVA 8

Nicola Arcozzi

Solo per la prova complessiva

(1) Quale delle seguenti affermazioni vale per ogni scelta di $a > 1$ e $x > 0$?

(i) $\log_a(\sqrt{a\sqrt{a}} \cdot \sqrt[a]{2}) = \frac{3}{2} + \frac{\log_a(2)}{a}$.

(ii) $\log_a(\sqrt{a\sqrt{a}} \cdot \sqrt[a]{2}) = \frac{3}{4} \cdot \log_a(2) + \frac{\log_a(2)}{a}$.

(iii) $\log_a(\sqrt{a\sqrt{a}} \cdot \sqrt[a]{2}) = \frac{3}{4} + \frac{1}{a \cdot \log_2(a)}$.

(iv) $\log_a(\sqrt{a\sqrt{a}} \cdot \sqrt[a]{2}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{\log_a(2)}{a}$.

(2) Quali delle seguenti affermazioni é vera per ogni $a > 0$?

(i) $0 < a^2 < 1 \implies 0 < a < 1$.

(ii) $1 < a^2 \implies 1 < a$.

(iii) $a < 1 \implies a^2 < 1$.

(iv) $1 < a^2$ e $a < 0 \implies a < -1$.

(3) Calcolare il seguente limite di successione:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{2n+1} + 5 \cdot n^4 + \log(n)}{2^{3n+1} + 7 \cdot n^5}$$

(i) $L = 0$.

(ii) $L = \infty$.

(iii) $L = \frac{3}{8}$.

(iv) $L = 3$.

Sia per la prova complessiva che per la seconda prova parziale.

(4) Siano $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$ e $g : [1, 2] \to \mathbb{R}$ due funzioni continue, $f(1) = 0$, $f(2) = 1$, $g(1) = 1$, $g(2) = 0$. Quale delle seguenti affermazioni è certamente vera?

(i) Esiste x in $[1, 2]$ tale che $3f(x) - 2g(x) = 10$.

(ii) Esiste x in $[1, 2]$ tale che $3f(x) + 2g(x) = 10$.

(iii) Esiste x in $[1, 2]$ tale che $f(x) \cdot g(x) = 66$.

(iv) Esiste x in $[1, 2]$ tale che $6f(x) - 4g(x) = f(x) \cdot g(x)$.

(5) Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni derivabili. Supponiamo che $f(-1) = 2$, $f(1) = -1$, $g(-1) = 3$, $g(1) = 11$, $f'(-1) = 5$, $f'(1) = 13$, $g'(-1) = 7$, $g'(1) = \sqrt{2}$. Sia inoltre

$$h(x) = f^2(x) \cdot g(x^2)$$

Trovare $h'(-1)$.

(6) Trovare gli intervalli su cui é decrescente la funzione $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^2 \cdot \log^2(x).$$

(7) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x^2} - 1}{3x \cdot \sin(5x)}.$$

(8) Trovare i valori di $a \in \mathbb{R}$ tali per cui i vettori

$$(a-1, 1), \ (3, a-1)$$

sono linearmente indipendenti.

(Facoltativo) Sia f la funzione dell'esercizio (6). Calcolare

$$\lim_{x \to 0^+} f(x), \ \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

e gli intervalli su cui f é convessa.

Utilizzare queste informazioni per disegnare il grafico di f.

Soluzioni. (1) (iii); (2) (iv); (3) (ii); (4) (iv); (5) $h'(-1) = 220 - 8\sqrt{2}$; (6) $[e^{-1}, 0)$; (7) $\frac{2}{15}$; (8) $a = 1 \pm \sqrt{3}$.

Facoltativo.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$$

f é convessa su $(0, e^{-3-\sqrt{5}}]$ e su $[e^{-3+\sqrt{5}}, +\infty)$.