TEST DI PROVA 9

Nicola Arcozzi

Nota. $\tan(x)$ e $\arctan(x)$ denotano rispettivamente tangente e arcotangente del numero reale x.

Solo per la prova complessiva

(1) Quale delle seguenti affermazioni vale per ogni scelta di $a > 1$ e $x > 0$?

(i) $a^{\log_{a^2}(x)} = \sqrt{x}$.

(ii) $a^{\log_{a^2}(x)} = x^2$.

(iii) $a^{\log_{a^2}(x)} = \log_a(x)$.

(iv) $a^{\log_{a^2}(x)} = \frac{x}{a}$.

(2) Quali delle seguenti affermazioni é dotata di senso e vera per ogni $x, y \in \mathbb{R}$?

(i) $\sqrt{|x|} < 2 < \sqrt{y} \implies x < 4 < y$.

(ii) $\sqrt{|x|} < 2 < \sqrt{y} \implies -4 < x < 4 < y$.

(iii) $\sqrt{|x|} < 2 < \sqrt{y} \implies 0 \leq x < 4 < y$.

(iv) $\sqrt{|x|} < 2 < \sqrt{y} \implies 0 \leq -4 < x < 4 < y$ o $y < -4 < x < 4$.

(3) Calcolare il seguente limite di successione:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{4^{-3n+3} + 5 \cdot n^4 + \log(n)}{2^{-6n+2} + (7 \cdot n^2)^2}$$

(i) $L = 0$.

(ii) $L = \infty$.

(iii) $L = \frac{5}{49}$.

(iv) $L = 16$.

Sia per la prova complessiva che per la seconda prova parziale.

(4) Siano $f : [2,3] \to \mathbb{R}$ e $g : [2,3] \to \mathbb{R}$ due funzioni continue, $f(2) = -1$, $f(3) = 2$, $g(2) = 2$, $g(3) = -3$. Quale delle seguenti affermazioni è certamente vera?

(i) Esiste x in $[2,3]$ tale che $f(x) \cdot g(x) = 0$.

(ii) Esiste x in $[2,3]$ tale che $f^2(x) + g^2(x) = 4$.

(iii) Esiste x in $[2,3]$ tale che $(f(x) + 2) \cdot (g(x) + 4) = 3$.

(iv) Esiste x in $[2,3]$ tale che $5 \cdot f(x) + 3 \cdot g(x) = 0$.

(5) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Supponiamo che $f(\pi/4) = 2$, $f(1) = 3$, $f'(\pi/4) = 5$, $f'(1) = 7$. Sia inoltre

$$h(x) = \arctan(f(\tan(x))), \ f : (\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}.$$

Allora,

(i) $h'(\pi/4) = \frac{7}{10}$.

(ii) $h'(\pi/4) = \frac{7}{5}$.

(iii) $h'(\pi/4) = 5$.

(iv) $h'(\pi/4) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \left(\frac{\pi}{4}\right)^2\right)$.

(6) Trovare gli intervalli su cui é crescente la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = 2 \cdot \arctan(3x+2) - 3 \cdot \log[1 + (3x+2)^2].$$

(i) $[-\frac{5}{9}, \frac{5}{9}]$.

(ii) $[\frac{5}{9}, \infty)$.

(iii) $(-\infty, -\frac{5}{9}]$.

(iv) f é decrescente su tutto $\mathbb{R}$.

(7) Calcolare il seguente limite:

$$L = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\cos(x)} - e}{\cos(x) - 1}.$$

(i) $L = 0$.

(ii) $L = +\infty$.

(iii) $L = 1$.

(iv) $L = e$.

(8) Trovare i valori di $a \in \mathbb{R}$ tali per cui i vettori

$$(2a-1, a), \ (a+1, 2a+1)$$

sono linearmente indipendenti.

(i) $a = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{6}$.

(ii) $a = \frac{1+\sqrt{13}}{6}$.

(iii) $a = \pm\frac{1}{2}$.

(iv) Per ogni valore di a i due vettori sono linearmente indipendenti.

(Facoltativo) Sia f la funzione dell'esercizio (6). Calcolare

$$\lim_{x \to -\frac{2}{3}^+} f(x), \ \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

e gli intervalli su cui f é convessa.

Utilizzare queste informazioni per disegnare il grafico di f.

Soluzioni. (1-i), (2-ii), (3-iii), (4-i), (5-ii), (6-iii), (7-iv), (8-i).

Svolgimento degli esercizi.

(1) Il problema consiste nel ridurre $\log_{a^2}(x)$ a un logaritmo in base a. Se $\log_{a^2}(x) = y$, allora $x = (a^2)^y = a^{2y}$ per definizione di logaritmo e una proprietá delle potenze, quindi (ancora per definizione di logaritmo) $y = \frac{1}{2}\log_a(x) = \log_a(x^{1/2})$. Allora,

$$a^{\log_{a^2}(x)} = a^y = a^{\log_a(x^{1/2})} = \sqrt{x}.$$

(2) Affinché l'espressione a sinistra abbia senso, dobbiamo avere $y \geq 0$. La disuguaglianza $2 < \sqrt{y}$ vale se e solo se $y > 4$. La disuguaglianza $\sqrt{|x|} < 2$ vale se e solo se $|x| < 4$ se e solo se $-4 < x < 4$. Quindi, $\sqrt{|x|} < 2 < \sqrt{y} \iff -4 < x < 4$ e $4 < y$.

(3) Il limite é del tipo $frac\infty\infty$. Gli addendi esponenziali tendono a zero, $4^{-3n+1} \to 0$ e $2^{-6n+2} \to 0$ per $n \to \infty$. Quindi, li posso trascurare. Il termine dominante al numeratore é $5 \cdot n^4$, poiché $\frac{log(n)}{n^4} \to 0$. Il limite é allora uguale a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5 \cdot n^4}{(7 \cdot n^2)^2} = \frac{5}{49}.$$

(4) Le ipotesi su f e il teorema degli zeri assicurano che esiste $x \in [2, 3]$ tale che $f(x) = 0$. A maggior ragione, $f(x) \cdot g(x) = 0$. Quindi (i) vale.

(5) Calcolo h' con il teorema sulla derivata di composizioni,

$$h'(x) = \frac{1}{f^2(\tan(x)) + 1} \cdot f'(\tan(x)) \cdot (1 + \tan^2(x)).$$

I tre fattori corrispondono alle derivate delle tre funzioni che (ordinatamente) composte danno h,

$$x \mapsto \tan(x) = y \mapsto f(y) = z \mapsto \arctan(z).$$

Le derivate in questione sono $D\arctan(z) = \frac{1}{1+z^2}$, $Df(y) = f'(y)$, $D\tan(x) = 1 + \tan^2(x)$.

Usando il fatto che $\tan(\pi/4) = 1$, calcolo

$$h'(\pi/4) = \frac{1}{f^2(1) + 1} \cdot f'(1) \cdot (1 + 1^2) = \frac{7}{5}.$$

(6) La funzione f é ben definita e derivabile su tutto $\mathbb{R}$. Calcolo f', utilizzando le derivate di funzioni elementari e il teorema sulla derivata di composizioni.

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{3}{1 + (3x+2)^2} - 3 \cdot \frac{2 \cdot (3x+2) \cdot 3}{1 + (3x+2)^2} = \frac{2 \cdot 3}{1 + (3x+2)^2} \cdot [1 - 3 \cdot (3x+2)].$$

Abbiamo dunque che $f'(x) > 0$ se e solo se $1 - 3 \cdot (3x+2) > 0$ se e solo se $x < -\frac{5}{9}$.

(7) Si tratta di un limite del tipo $\frac{0}{0}$, a cui possiamo applicare il teorema di de l'Hospital.

$$L = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\cos(x)} - e}{\cos(x) - 1} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-\sin(x) \cdot e^{\cos(x)}}{-\sin(x)}.$$

Quest'ultimo é a sua volta un limite del tipo $\frac{0}{0}$, a cui possiamo nuovamente applicare il teorema di de l'Hospital,

$$L = \lim_{x \to 0^+} \frac{-\sin(x) \cdot e^{\cos(x)}}{-\sin(x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\cos(x) \cdot e^{\cos(x)} - \sin^2(x) \cdot e^{\cos(x)}}{\cos(x)} = e.$$

(8) Cerchiamo $x, y \in \mathbb{R}$, $(x,y) \neq (0,0)$, tali che

$$(0,0) = x(2a-1, a) + y(a+1, 2a+1) = ((2a-1)x + (a+1)y, ax + (2a+1)y),$$

cioé vogliamo che il sistema

$$\begin{cases} (2a-1)x + (a+1)y = 0 \\ ax + (2a+1)y = 0 \end{cases}$$

abbia almeno una soluzione $(x,y) \neq (0,0)$.

Se $a \neq 0$, ricavo x dalla seconda equazione,

$$x = -\frac{2a+1}{a} y,$$

sostituisco nella prima e ottengo

$$\left[-\frac{(2a-1) \cdot (2a+1)}{a} + (a+1) \right] \cdot y = 0.$$

Questa equazione ha soluzioni $y \neq 0$ se e solo se

$$0 = a \cdot (a+1) - (2a-1) \cdot (2a+1) = -3a^2 + a + 1,$$

cioé se $a = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{6}$. Negli altri casi dev'essere $y = 0$, quindi $x = 0$.

Se fosse invece $a = 0$, avremmo il sistema

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ y = 0 \end{cases},$$

che ha come unica soluzione $(x, y) = (0, 0)$.