# TEST DI PROVA 10, con soluzioni

Nicola Arcozzi

(1) Calcolare la matrice $A = B \cdot C$ e il determinante di $A$, dove

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) Sia

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{-n} + n}{4^{-n} - n^2}.$$

Allora, $L =$
(i) $0$
(ii) $\infty$
(iii) $-\frac{1}{2}$
(iv) $\frac{1}{2}$

(3) Siano $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ e $g : [0,2] \to \mathbb{R}$ funzioni continue, $f$ crescente su $[0,2]$, $f(0) = 1$, $f(2) = 3$, $g(0) = -2$, $g(2) = -4$. Quale delle seguenti affermazioni è certamente vera?

(i) Esiste $x$ in $[0,2]$ tale che $f(x)g(x) = 0$.

(ii) Esiste $x$ in $[0,2]$ tale che $f(x) + g(x) = 0$.

(iii) Non esiste $x$ in $[0,2]$ tale che $f(x) = 0$.

(iv) Non esiste $x$ in $[0,2]$ tale che $g(x) = 0$.

(4) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che $f(x) > 0$ per ogni $x$ in $\mathbb{R}$. Sia $h : (0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = e^{f(\log(x))}$$

Quali delle seguenti è la derivata di $f$?

(i) $h'(x) = f'(x)$.

(ii) $h'(x) = e^{f(\log(x))} \cdot f'(\log(x)) \cdot \frac{1}{x}$.

(iii) $h'(x) = e^{f'(\log(x))} \cdot \frac{1}{x}$.

(iv) $h'(x) = e^{f(\log(x))} \cdot f(\log(x)) \cdot \frac{1}{f(x)}$.

(5) Sia $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = (x+1)\log(x+1)$$

(a) Trovare gli intervalli su cui $f$ è crescente.

(b) Calcolare

$$\lim_{x\to\infty} f(x), \quad \lim_{x\to -1} f(x)$$

(c) Trovare gli intervalli su cui $f > 0$ e disegnare sommariamente il grafico di $f$.

(6) **Esercizio facoltativo.** Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$$

**Soluzioni.**

(1) $det(A) = -2$ e

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

(2) (i).

(3) (iii).

(4) (ii).

(5) (a) la funzione è crescente su $[e^{-1} - 1, \infty)$. (b) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to -1} f(x) = 0$. (c) $f > 0$ su $(0, \infty)$.

(6) $\frac{1}{2}$