TEST DI PROVA 6, con soluzioni

Nicola Arcozzi

(1) Calcolare il determinante della matrice $A = B \cdot C$, dove

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) Sia

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(1/n)}{2 - 5\log(3n^2+1)}.$$

Allora, $L =$

(i) 0

(ii) ∞

(iii) $1/15$

(iv) $1/10$

Soluzioni.

(1) 8	(2) (iv)

Svolgimento sintetico.

(1) Ricordiamo innanzitutto che $det(A) = det(B \cdot C) = det(B) \cdot det(C)$, quindi non c'è bisogno di calcolare il prodotto delle matrici. Calcolo ora $det(B)$ e $det(C)$.

$$\begin{aligned} det(B) &= -1 \cdot det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot det \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -1 \cdot (-1) - 1 \cdot (-3) = 4 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} det(C) &= 1 \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 1 \cdot (1) + 1 \cdot (1) = 2 \end{aligned}$$

Quindi, $det(A) = 4 \cdot 2 = 8$.

(2) Il limite è del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Infatti, poichè $\frac{1}{n} \to 0$, abbiamo che $\log(1/n) \to -\infty$. Si tratta ora di capire meglio come sia fatto il denominatore. Si osservi che l'addendo trainante dell'argomento del logaritmo al denominatore è certamente $3n^2$.

$$\begin{aligned} \frac{\log(1/n)}{2 - 5\log(3n^2+1)} &= \frac{-\log(n)}{2 - 5\log\left(3n^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{3n^2}\right)\right)} \\ &= \frac{-\log(n)}{2 - 5\left[\log(n^2) + \log(3) + \log\left(1 + \frac{1}{3n^2}\right)\right]} \\ &= \frac{-\log(n)}{2 - 10\log(n) - 5\log(3) - 5\log\left(1 + \frac{1}{3n^2}\right)} \\ &= \frac{-\log(n)}{\log(n)} \cdot \frac{1}{\frac{2}{\log(n)} - 10 - \frac{5\log(3)}{\log(n)} - 5\frac{\log\left(1+\frac{1}{3n^2}\right)}{\log(n)}}. \end{aligned}$$

Ora, al tendere di n a ∞, $\log(n) \to \infty$ e

$$\log\left(1 + \frac{1}{3n^2}\right) \to \log(1+0) = 0$$

quindi,

$$\frac{-\log(n)}{\log(n)} \cdot \frac{1}{\frac{2}{\log(n)} - 10 - \frac{5\log(3)}{\log(n)} - 5\frac{\log\left(1+\frac{1}{3n^2}\right)}{\log(n)}} \to (-1) \cdot \frac{1}{0 - 10 - 0 - 5 \cdot 0} = \frac{1}{10}$$