# TEST DI PROVA 9, con soluzioni

Nicola Arcozzi

(1) Calcolare la matrice $A = B \cdot C$ e il determinante di $A$, dove

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) Sia

$$L = \lim_{n \to \infty} \frac{3n \log(n) + n}{2 \log(n^n) - (\log(n))^2}.$$

Allora, $L =$

(i) $0$
(ii) $-\infty$
(iii) $-3$
(iv) $\frac{3}{2}$

(3) Siano $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ e $g : [0,2] \to \mathbb{R}$ funzioni continue, $f(0) = 2$, $f(2) = 1$, $g(0) = -1$, $g(2) = -2$. Quale delle seguenti affermazioni è certamente vera?

(i) Esiste $x$ in $[0,2]$ tale che $f(x) = 0$.

(ii) Esiste $x$ in $[0,2]$ tale che $f(x)g(x) = 0$.

(iii) Per ogni $x$ in $[0,2]$, $f(x) \neq g(x)$.

(iv) Esiste $x$ in $[0,2]$ tale che $f(x) + g(x) = 0$.

(4) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che $f(x) > 0$ per ogni $x$ in $\mathbb{R}$. Sia

$$h(x) = \sqrt{f(x^2)}$$

Quali delle seguenti è la derivata di $f$?

(i) $h'(x) = f'(x)$.

(ii) $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2xf'(x^2)}}$.

(iii) $h'(x) = \frac{f'(x^2)x}{\sqrt{f(x^2)}}$.

(iv) $h'(x) = \frac{x}{\sqrt{f'(x^2)}}$.

(5) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = (x+1)e^{-x^2}$$

(a) Trovare gli intervalli su cui $f$ è crescente.

(b) Calcolare

$$\lim_{x\to\infty} f(x), \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

(c) Trovare gli intervalli su cui $f > 0$ e disegnare sommariamente il grafico di $f$.

(6) **Esercizio facoltativo.** Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin(x)}{1-\cos(x)}$$

**Soluzioni.**

(1) $det(A) = 0$ e

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) (iv).

(3) (iv).

(4) (iii).

(5) (a) la funzione è crescente su $[\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}]$. (b) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. (c) $f > 0$ su $(-1, \infty)$.

(6) 2