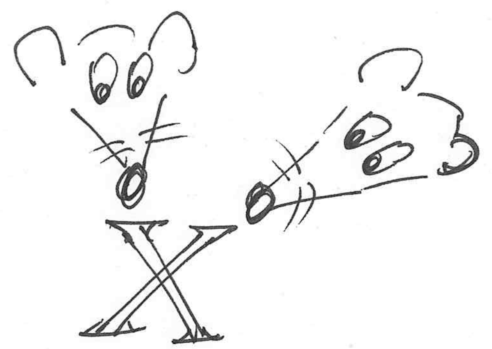


IN MATHEMATICS

Nicola Arcozzi

Cancellazioni

Perché è interessante la cancellazione di quantità positive e negative in una somma? Tentativo di risposta in 10 quadri.

Quadro (i). Serie (non assolutamente) convergenti.

(a) Sappiamo che: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$ e $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \infty$ $(a_n \in \mathbb{R})$

$$\Rightarrow \forall \alpha \in [-\infty, +\infty] \ \exists \sigma \in \Sigma(\mathbb{N}) \text{ t.c. } \sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \alpha$$

$\Sigma(\mathbb{N})$: biiezioni (permutazioni) di $\mathbb{N}$.

(b) Confronta con: $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} \ \forall \sigma \in \Sigma(\mathbb{N})$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \alpha$$

Esercizi (rafforzamenti di quanto detto sopra).

(1) $\exists \sigma \in \Sigma(\mathbb{N})$: $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} < \infty$ se e solo se

(1.1) $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = +\infty$, oppure

(1.2) $\sum_{\{n:\, a_n \geq 0\}} a_n = +\infty = -\sum_{\{n:\, a_n \leq 0\}} a_n$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$ e $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = +\infty \Rightarrow \forall [\alpha, \beta] \subseteq [-\infty, +\infty]$

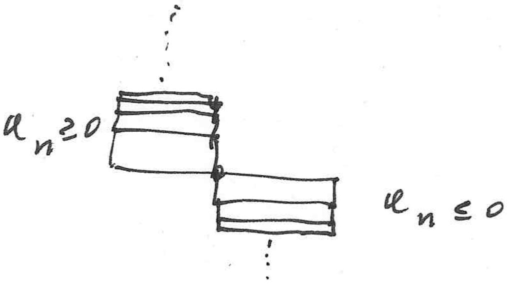
$\exists \sigma \in \Sigma(\mathbb{N})$ t.c. $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ ha $[\alpha, \beta]$ come insieme limite

(3) Dimostrare (b).

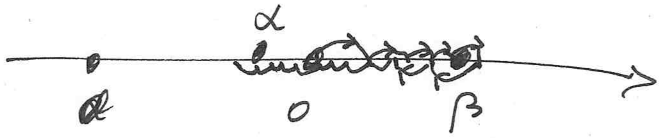
Suggerimento. $\sum a_n < \infty$ e $\sum |a_n| = +\infty$

$$\Rightarrow \sum_{n:\, a_n \geq 0} a_n = +\infty = -\sum_{n:\, a_n \leq 0} a_n \quad \text{e} \quad a_n \to 0.$$

Ordino gli $a_n \geq 0$ in ordine decrescente e gli $a_n \leq 0$ in ordine decrescente:

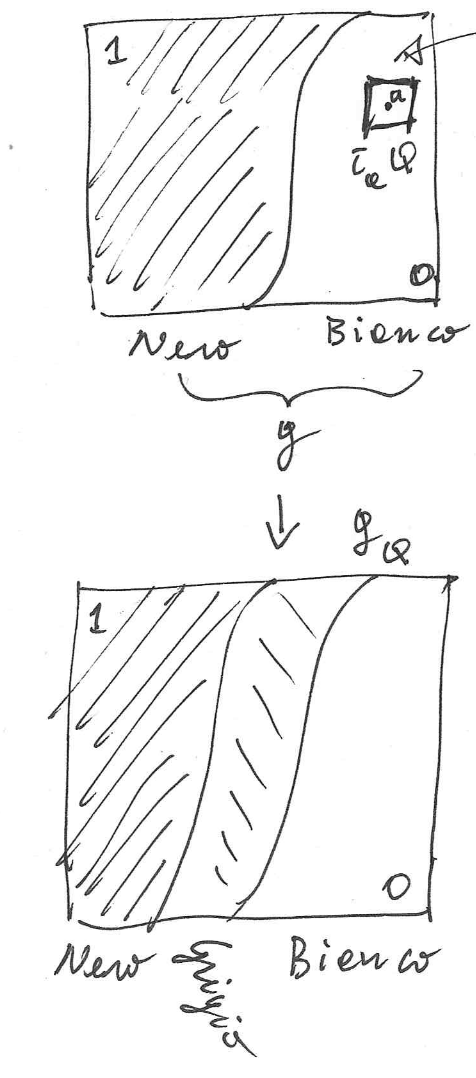


Li uso per una "scansione" della retta reale:



Messaggio: quando le cancellazioni svolgono un ruolo, le somme infinite non sono commutative (l'ordine conta!).

Quadro (ii). Rilevare dettagli a una data scala.



$$\frac{1}{|Q|}\chi_Q(a-z) = f(a-z)$$

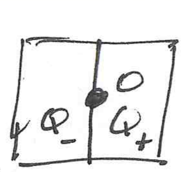
$$g_Q(a) = \int f(a-z)\, g(z)\, dz = \frac{1}{|Q|}\int_{\tau_a Q} g(z)\, dz$$

$$\tau_a Q = Q + a$$

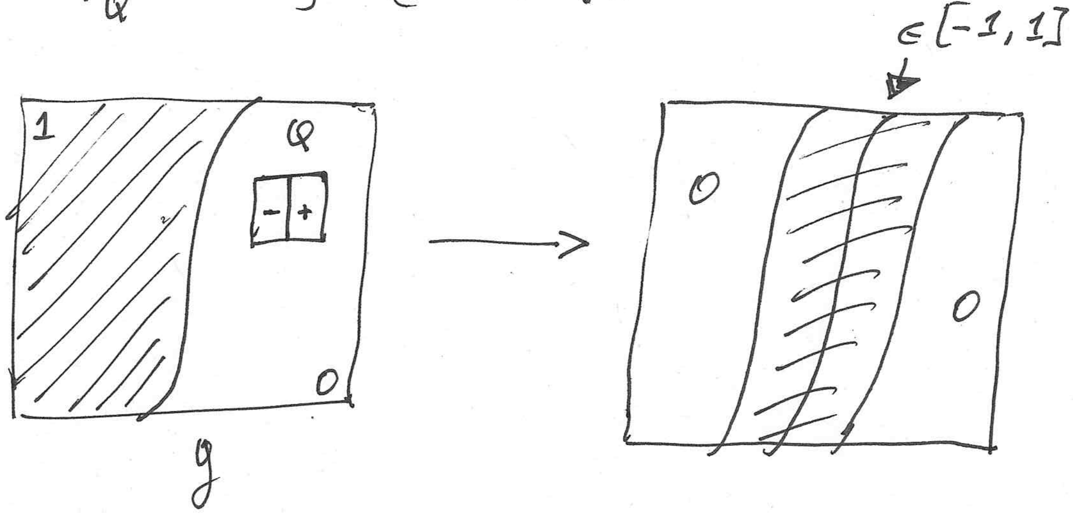
Punto di vista della Teoria del Potenziale: g_Q rileva il dettaglio di g alla scala diam(Q).

È una rilevazione "statica".

$$\varphi(z) = \frac{1}{|Q|}\left(\chi_{Q_+} - \chi_{Q_-}\right)(z)$$

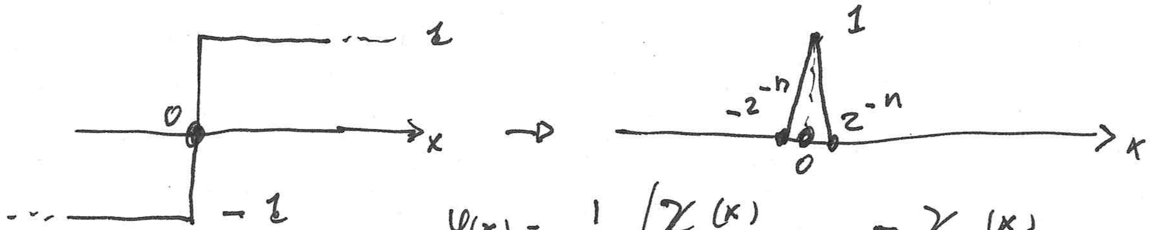


$$\tilde{g}_Q(a) = \int \varphi(a-z)\, g(z)\, dz$$



La cancellazione mette in evidenza il dettaglio che emerge alla scala diam(Q), mentre annulla tutto ciò che a scala diam(Q) non presenta dettaglio:
Punto di vista dell'Analisi Armonica.

Esempio in dimensione $N=1$.



$$\varphi(x) = \frac{1}{2^{-n}}\left(\chi_{[0,2^{-n-1}]}(x) - \chi_{[-2^{-n-1};\,0]}(x)\right)$$

- Il punto di vista della Teoria del Potenziale privilegia le somme, ispirandosi a
$$\frac{f(x-h)+f(x+h)}{2}$$
- Il punto di vista dell'Analisi Armonica privilegia le differenze,
$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} \underset{h\to 0}{\sim} f'(x)$$
- In entrambi un integrale ci dà una "scala".
- Spesso i due punti di vista sono entrambi utili (funzioni armoniche, p. esempio).

Quadro (iii). Medie (scarti).

$$a = \text{media}(a_1, \dots, a_n) := \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$$

$d_j := a_j - a$ misura quanto $a_j \begin{Bmatrix} e \\ de \end{Bmatrix}$-merge da a.

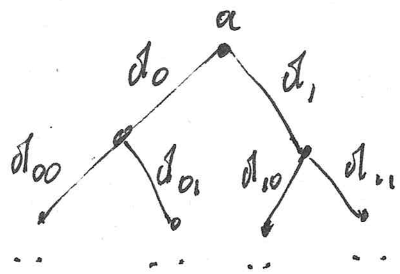
$$\sum_{j=1}^{n} d_j = 0$$ (non tutti stanno sopra la media!)

$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} d_j^2$: scarto quadratico medio;

una buona misura del dettaglio contenuto in $\{a_1, \dots, a_n\}$.

Estensioni: pesate, integrali ...

Quadro (iv). Martingale diadiche (Testa o Croce).



$$(*) \begin{cases} d_0 + d_1 = 0 \\ d_{00} + d_{01} = 0 = d_{10} + d_{11} \\ \dots\dots \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= a + d_0 \\ a_1 &= a + d_1 \end{aligned}\right| \to \frac{a_0 + a_1}{2} = a$$

$$\left.\begin{aligned} a_{00} &= a_0 + d_{00} \\ a_{01} &= a_0 + d_{01} \end{aligned}\right| \to \frac{a_{00} + a_{01}}{2} = a_0$$

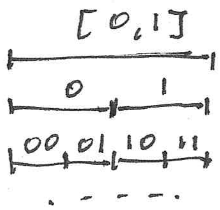
$$(a_{00} + a_{01} + a_{10} + a_{11})/4 = (a_0 + a_1)/2 = a$$

e catena...

(a) Una macchina per produrle. $\varphi \in L^1([0,1])$.

$I = \left[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right]$ $\quad 1 \le j \le 2^n$ (intervallo diadico).

$$\varphi(I) := \frac{1}{|I|} \int_I \varphi(x)\, dx$$



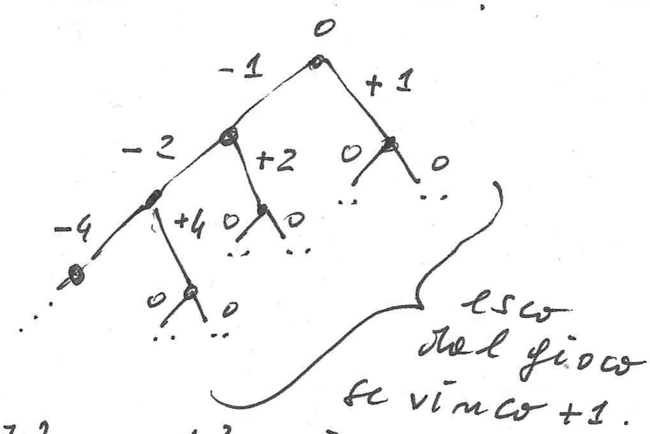
← etichettatura degli intervalli

$$a = \int_0^1 \varphi\, dx$$

$$a_0 = \frac{1}{|I_0|} \int_{I_0} \varphi\, dx \; ; \; a_1 = \frac{1}{|I_1|} \int_{I_1} \varphi\, dx \; \dots \text{ e catena}$$

Tutte le martingale vengono dalle macchine?

No: "lascia o raddoppia"



Esercizio

(1) Se $\varphi \in L^2([0,1])$,

allora $$\|\varphi\|_{L^2}^2 = a^2 + \frac{d_0^2 + d_1^2}{2} + \frac{d_{00}^2 + d_{01}^2 + d_{10}^2 + d_{11}^2}{2^2} + \dots$$

(2) Se $a;\ d_0, d_1;\ d_{00}, d_{01}, d_{10}, d_{11}; \dots$

soddisfano le relazioni (*) e

$$a^2 + \frac{d_0^2 + d_1^2}{2} + \frac{d_{00}^2 + d_{01}^2 + d_{10}^2 + d_{11}^2}{2^2} + \dots < +\infty,$$

allora $\exists\, \varphi \in L^2([0,1])$ t.c. la martingala è prodotta dalla macchina ($\square$).

- Variazioni sul tema:
  - nuclei di Poisson
  - spazi di Hardy

Quadro (V): sistemi ortonormali in L^2.

Esercizio. Mostrare che non esiste un s.o.n.c. per $L^2([0,1])$, $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$, con $\varphi_j \geq 0$ $\forall j$.

Sia (X, m) di misura, σ-finito.

$A \subseteq X$ misurabile è un atomo sse $m(E \cap A) = \begin{cases} m(A) \\ 0 \end{cases}$

$\forall E \subseteq X$ misurabile. ~~Usupp~~

Es. in $\ell^2(\mathbb{N})$ ogni $\{n\}$ è un atomo.

(X, m) è atomico se $X = \coprod_{j=1}^{\infty} A_j \cup N$

con ogni A_j atomo e $m(N) = 0$.

Esercizio. Estendere l'esercizio precedente agli spazi atomici.

Morale: l'ortogonalità in L^2 richiede (in casi non banali) delle cancellazioni.

Quadro (VI): Perché le serie di Fourier?

$L^2([0,1])$: s.o.n.c. privilegiati?

$[0,1) \longrightarrow \mathbb{T}$
$x \longmapsto e^{2\pi i x}$

$\mathbb{T}$ è un gruppo abeliano
$(x,y) \longmapsto x+y \pmod{\mathbb{Z}}$.

$\tau_a x = x + a \pmod{\mathbb{Z}}$

$$\frac{\tau_h f(x) - f(x)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} -\frac{d}{dx} f(x)$$:

$-\frac{d}{dx}$ è il generatore infinitesimale delle traslazioni: $\tau_h = e^{-h \cdot d/dx}$

$\tau_h f(x) = f(\tau_h x) = f(x-h)$

Diagonalizzo $\frac{d}{dx}$: $\begin{cases} \frac{d}{dx} e = \lambda e \\ e(1) = e(0) \end{cases}$

$\Leftrightarrow e = e_n(x) = e^{2\pi i n x}$, $\lambda = 2\pi i n$ $(n \in \mathbb{Z})$.

($2\pi i n$ autovalore; e_n autovettore).

"Teorema Spettrale". $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ è un s.o.n.c. di $L^2([0,1))$.

$$f \in L^2([0,1)) \Rightarrow f(x) \overset{L^2}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, e_n \rangle_{L^2} \cdot e_n(x)$$
$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) \cdot e^{2\pi i n x}$$

con $\hat{f}(n) = \int_0^1 e^{-2\pi i n x} f(x)\, dx$

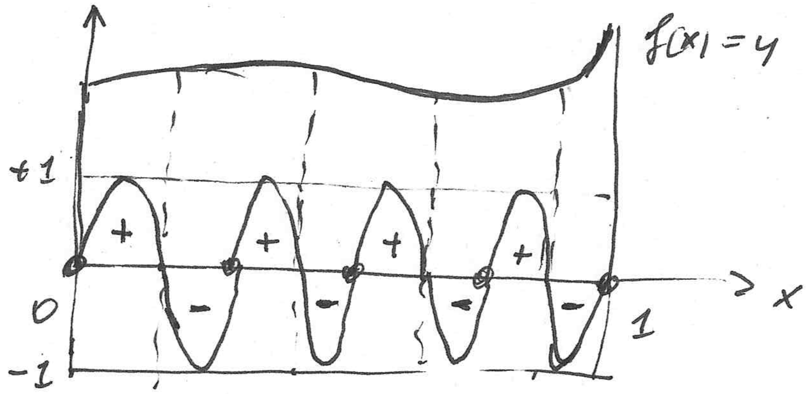
Teorema di L. Carleson (19). La serie converge puntualmente q.o.

Oss. $f \in L^2([0,1)) \Rightarrow \sum |\hat{f}(n)|^2 = \|f\|_{L^2}^2 < \infty$,

quindi $\hat{f}(n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$,

ma $|\hat{f}(n)| = \left| \int_0^1 f(x)\, e^{-2\pi i n x}\, dx \right| \le \int_0^1 |f(x)|\, dx$, costante.

Il sistema $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ è pieno di cancellazioni



e_n "rimescola" il segno di f, annichilendone l'integrale.

Quadro (vii). Operatori che commutano con le traslazioni in $L^2([0,1))$.

$f : [0,1) \to \mathbb{C}$ "segnale periodico" $\qquad f \longrightarrow \boxed{\;T\;} \longrightarrow Tf \qquad Tf : [0,1) \to \mathbb{C}$

"scatolone"

Se T è un apparato ingegneristico (o sistema fisico) è ragionevole chiedere: $\tau_a(Tf)(x) = T(\tau_a f)(x)$ (invarianza rispetto al tempo).

Esercizio: Se $\forall f \in L^2 \Rightarrow Tf \in L^2$, allora $\widehat{(Tf)}(n) = \hat{T}(n)\hat{f}(n)$, per una successione $\{\hat{T}(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ fissata (e limitata!: $|\hat{T}(n)| \le |||T||| \ \forall n \in \mathbb{Z}$).
Il viceversa è ovvio.

Esercizio. Se $k \in L^1([0,1])$ e $T_k f(x) = \int_0^1 \underbrace{k(x-t)}_{\text{mod } \mathbb{Z}} f(t)\, dt = k * f(x)$, allora $\|T_k f\|_{L^2} \le \|k\|_{L^1} \cdot \|f\|_{L^2}$ e (1) $\tau_a(T_k f) = T_k(\tau_a f)$; $\widehat{T_k}(n) = \hat{k}(n) \ \forall n \in \mathbb{Z}$.

Quadro (viii): trasformata di Hilbert sul cerchio. (8

Sia $\quad H : L^2([0,1)) \to L^2([0,1))$ come in (vii) con

$$\widehat{H}(n) = -i\ \mathrm{sign}(n) \qquad (\text{e } \widehat{H}(0) = 0).$$

Motivazioni:

(1) Analisi complessa. Se $f(z) = u(z) + i\, v(z)$ è olomorfa in $\Delta = \{z : |z| \le 1\}$, $v(0) = 0$ e se identifico $\tilde{u}(x) \equiv u(e^{2\pi i x})$, $\tilde{u} : [0,1) \to \mathbb{R}$, allora $\tilde{v} = H\tilde{u}$. (Esercizio: segue dalle equazioni di Cauchy-Riemann).

(2) Ingegneria elettronica / Teoria degli operatori.

$(\tilde{u} + i H\tilde{u})\widehat{\ }(n) = \widehat{\tilde{u}}(n)\,(1 + \mathrm{sgn}(n)) = 0$ se $n < 0$:

$1 + iH$ filtra le frequenze $e^{2\pi i n x}$ t.c. $n < 0$, proiettando ortogonalmente L^2 su

$H^2 = \{\tilde{v} \in L^2([0,1)) : \widehat{\tilde{v}}(n) = 0 \ \forall n < 0\}$ (spazio di Hardy).

(3) Calcolo (pseudo) differenziale.

$$\frac{d}{dx} e^{2\pi i n x} = 2\pi i n \cdot e^{2\pi i n x}; \quad \frac{d^2}{dx^2} e^{2\pi i n x} = -4\pi^2 n^2 e^{2\pi i n x};$$

quindi $\displaystyle \left\{ \frac{d}{dx} \circ \left(-\frac{d^2}{dx^2} \right)^{-1/2} \right\} e^{2\pi i n x} = \frac{i n}{|n|} \quad$ (se $n \neq 0$),

cioè:

$$\boxed{H = -\frac{d}{dx} \circ \left(-\frac{d^2}{dx^2} \right)^{-1/2}}$$

(dove s'è usato un "calcolo funzionale" elementare).

- Variazioni sul tema. Se Δ è il laplaciano in $\mathbb{R}^n$, l'operatore $\displaystyle R_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \circ (-\Delta)^{-1/2}$ è la Trasformata di Riesz in $\mathbb{R}^n$.

H proviene da un nucleo $k \in L^1([0,1))$ come in (vii)? <u>NO</u>. Se $k \in L^1([0,1))$, allora $\hat{k}(n) \xrightarrow[n \to \pm\infty]{} 0$ (T. di Riemann-Lebesgue), mentre $|\hat{H}(n)| = 1 \quad \forall n \neq 0$.

Non ci arrendiamo così facilmente!

Se $\hat{H}(n) = \hat{k}(n)$, avremmo

$$k(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{H}(n)\, e^{2\pi i n x} = -i \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \operatorname{sgn}(n)\, e^{2\pi i n x},$$

che diverge! Poco male; provo a definire

$$k(x) = \lim_{r \to 1^-} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \hat{H}(n)\, r^{|n|} \cdot e^{2\pi i n x}$$

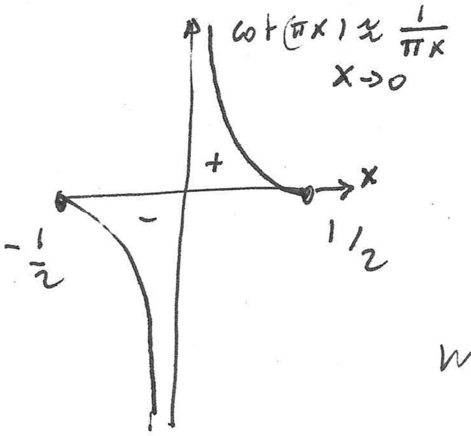
$$= \lim_{r \to 1^-} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} -i \operatorname{sgn}(n)\, r^{|n|} \cdot e^{2\pi i n x}$$

$$= \lim_{\substack{r = |z| \to 1^- \\ z = r e^{2\pi i x}}} \frac{z - \bar{z}}{|1 - z|^2} \quad (\underline{\text{Esercizio}}!)$$

$$= \cot(\pi x) \quad (\underline{\text{Esercizio}}!).$$

Proviamo con

$$H f(x) = \int_{-1/2}^{1/2} \cot(\pi(x-y))\, f(y)\, dy = \int_{-1/2}^{1/2} f(x-y) \cdot \cot(\pi y)\, dy :$$



integrale divergente quasi sempre!

$$\int_{-1/2}^{1/2} |f(x-y)| \cdot |\cot(\pi y)|\, dy = +\infty$$

Il nucleo $\cot(\pi y)$ è però molto "cancellante" per $y \to 0$.

Proviamo con:

$$Hf(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon \le |y| \le 1/2} \cot(\pi y) \cdot f(x-y)\, dy$$

<u>Teorema</u>. (1) $f \in L^1 \Rightarrow Hf(x)$ esiste per q.o. $x \in [0,1)$

(2) $\forall p \in (1,\infty)\ \exists C_p > 0 : \ \|Hf\|_{L^p} \le C_p \cdot \|f\|_{L^p}$

$C_p = \cot\left(\frac{\pi}{2p^*}\right)$ Pichorides, '72. $p^* = \max\left(p, \frac{p}{p-1}\right)$

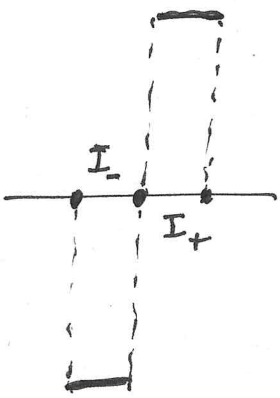
<u>Quadro (ix)</u>: basi di Haar e martingale.

In $L^2([0,1))$ prendiamo $\varphi_\emptyset \equiv 1$ e

$$\varphi_{n,j}(x) = \frac{1}{|I_{n,j}|^{1/2}} \cdot \left(\chi_{I^+_{n,j}} - \chi_{I^-_{n,j}}\right)(x)$$

$I^-_{n,j}$ $I^+_{n,j}$

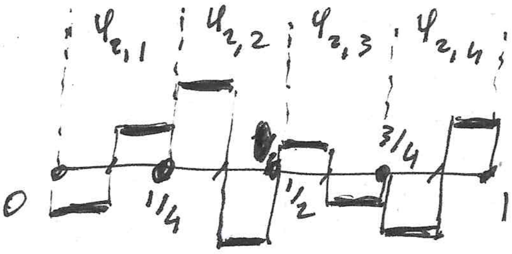
$\frac{j-1}{2^n}$ $I_{n,j}$ $\frac{j}{2^n}$



$\varphi_\emptyset$ e $\varphi_{n,j}$; $1 \le j \le 2^n$, $n \in \mathbb{N}$ costituisce un s.o.n.c. per $L^2([0,1))$, "sistema di Haar".

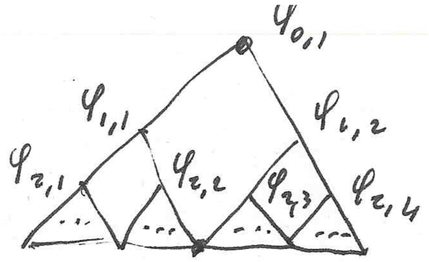
<u>Esercizio</u>: dimostrare che è un s.o.n.c. (la completezza è elementare, ma non banale).

$$f \in L^2([0,1)) \Rightarrow f(x) = \sum_{n,j} \langle f, \varphi_{n,j} \rangle_{L^2} \cdot \varphi_{n,j}(x)$$



"dettaglio" di f che emerge alla scala $\frac{1}{2^2}$ $(n=2)$

- <u>Morale</u>: la funzione assomiglia allo strumento con cui la rivelo (vale per ogni s.o.n.c.). Se voglio mettere in evidenza dettagli diversi, uso s.o.n.c. diversi: idea all'origine delle "ondine".



<u>Esercizio</u>: mostrare che le funzioni di Haar sono la stessa cosa delle martingale in (iv).

Suggerimento: meditare gli esercizi in (iv).

P. es. $\varphi_{1,0} \longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(d_0, d_1)$, nel senso che

$$\langle \varphi, \varphi_{1,0} \rangle \cdot \varphi_{1,0}(x) = \begin{cases} d_0/\sqrt{2} & \text{per } x \in I^-_{0,1} \\ d_1/\sqrt{2} & \text{per } x \in I^+_{0,1} \end{cases}$$

<u>Nota</u>. Come $e_n(x) = e^{2\pi i n x}$ emerge dal gruppo $\mathbb{T}$, così le $\varphi_{n,j}$ emergono dal gruppo (abeliano)

$$G = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2^2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_2^n \oplus \cdots$$

La corrispondente analisi spettrale ci porterebbe alla definizione dello spazio di Fock (bosonico) in una versione "baby".

<u>Quadro (X)</u>. Trasformate di martingale.

Sia $v = \{v_{n,j}\}_{\substack{1 \le j \le 2^n \\ n \in \mathbb{N}}} \in \ell^\infty$, $|v_{n,j}| \le 1 \quad \forall n, j$

e sia $f : [0,1) \to \mathbb{R}$. Poniamo

$$Vf(x) = \sum_{n,j} v_{n,j} \langle f, \varphi_{n,j} \rangle_{L^2} \cdot \varphi_{n,j}(x),$$

<u>trasformata di</u> f <u>secondo</u> v.

<u>Esercizio (ovvio)</u>: $\|Vf\|_{L^2([0,1))} \le \|f\|_{L^2([0,1))}$

<u>Oss.</u> V assomiglia alla trasformata di Hilbert; si pensi al caso $v_{n,j} \in \{-1, +1\}$.

<u>Teorema</u>. $\forall p \in (1,\infty)$: $\| Vf \|_{L^p} \leq B_p \cdot \| f \|_{L^p}$

Burkholder '84: $B_p = p^* - 1 := \max\left(p-1, \frac{1}{p-1}\right)$.

La dimostrazione di Burkholder si basa sull'esistenza di una funzione ausiliaria $\mathcal{B}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con alcune proprietà ausiliari. L'idea riprende ~~alla~~ dimostrazioni d'inizio '900 della limitatezza di H su L^p ed è stata a sua volta ripresa da Nazarov, Treil e Volberg, che hanno sviluppato la tecnica delle "funzioni di Bellman".

Le funzioni di Bellman sono una delle aree "calde" dell'Analisi Armonica d'oggigiorno.

<u>Conclusione</u>: dimostrazione che H è limitata su L^p per $1 < p \leq 2$ (il caso $p > 2$ segue per dualità).

Sia $\Phi : \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\Phi(u,v) = |v|^p - C_1^p \cdot |u|^p$, con $C_1 = \left(\frac{p}{p-1}\right)^{1/p}$.

<u>Esercizio</u> (1) Φ è superarmonica; $\Delta \Phi \leq 0$ nel senso delle distribuzioni. (2) Se $f = u + iv$ con $v = Hu$, allora $\Phi(u,v)$ è ancora super-armonica.

Quindi: $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \{ |v(e^{i\theta})|^p - C_1^p |u(e^{i\theta})|^p \} d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(f(e^{i\theta}))\, d\theta$

$\leq \Phi(f(0)) = |v(0)|^p - C^p \cdot |u(0)|^p = -C^p \cdot |u(0)|^p \leq 0$

$\uparrow$ le funzioni superarmoniche soddisfano un super-valor medio.