PROVA SCRITTA DEL II APPELLO DI ANALISI MATEMATICA LA INGEGNERIA EDILE - RAVENNA

Nicola Arcozzi

18 gennaio 2007

Nome e cognome..

Il tempo a disposizione é di 2 ore e 30 minuti. Non si possono utilizzare calcolatrici grafiche. Non si possono utilizzare libri o appunti.

Il punteggio per gli esercizi a scelta multipla é di 3 pt. per la risposta esatta, -1 pt per una risposta errata, 0 pt. se la risposta non viene data. Negli esercizi a risposta libera non c'é punteggio negativo. Scrivete la risposta sul foglio degli esercizi, non su un foglio a parte.

Si viene ammessi alla prova orale con un punteggio superiore o uguale a 10 pt.

(1) [3pt] Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita da $f(v) = Av$ $(v \in \mathbb{R}^3)$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a-2 & 0 \\ 1 & 0 & a \\ a & 0 & a \end{pmatrix},$$

dove $a \in \mathbb{R}$. Trovare tutti i valori di a per cui l'equazione vettoriale $f(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ha infinite soluzioni.

(i) $a = 0$.

(ii) $a = 1, 2$.

(iii) $a = 1$.

(iv) Per nessun valore di a.

(2) [3pt] Calcolare L,

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot 4^{-2n} + 5\cdot n^3}{7\cdot 16^n + 11\cdot n^3}.$$

(i) $L = 0$.

(ii) $L = +\infty$.

(iii) $L = \frac{3}{7}$.

(iv) $L = \frac{5}{11}$.

(3)[3 punti] Calcolare:

$$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\log(1+3x)}{1-\cos(2x)}$$

(i) $L = 0$.

(ii) $L = +\infty$.

(iii) $L = \frac{3}{4}$.

(iv) $L = \frac{3}{2}$.

(4) [6pt] Consideriamo i seguenti vettori in $\mathbb{R}^4$: $v_1 = (1,1,1,0)$, $v_2 = (0,1,1,0)$, $v_3 = (0,0,1,0)$, e sia $V =< v_1, v_2, v_3 >$ il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ da loro generato. Trovare:

(i) $dim(V)$, la dimensione di V;

(ii) una base ortonormale per V;

(iii) una base ortonormale per $V^\perp$, il complemento ortogonale di V in $\mathbb{R}^4$;

(iv) la proiezione del vettore $u = (a,b,c,d)$ su V e su $V^\perp$.

(5)[3 punti] Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ se } x \leq a, \\ 2x \text{ se } x > a. \end{cases}$$

Per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ la funzione f é continua?

(i) $a = 2$.

(ii) $a = 0$.

(iii) $a = 0, 2$.

(iv) Per nessun valore di a.

(6)[3 punti] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile su tutto $\mathbb{R}$.
Sia ora $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cosí definita:

$$h(x) = f(x + f(x)).$$

Calcolare $h'(1)$, sapendo che $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f'(1) = \pi$, $f'(1 + \pi) = e$, $f'(3) = 100$.

(i) $h'(1) = e$.

(ii) $h'(1) = \pi(1 + \pi)$.

(iii) $h'(1) = 100(1 + \pi)$.

(iv) $h'(1) = \pi^2$.

(7)[3 punti] Sia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e supponiamo che $f(0) = 2$ e $f(1) = 1$. Dalle ipotesi su f segue che

(i) Esiste un unico x in $[0, 1]$ tale che $f(x) = \frac{3}{2}$.

(ii) f é decrescente in $[0, 1]$.

(iii) L'equazione $f(x) = \frac{3}{2}$ ha almeno una soluzione $x \in [0, 1]$.

(iv) Non esistono $x \in [0, 1]$ tali che $f(x) = 0$.

(8)[6 punti]Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = e^{-x^2+x-6}.$$

(a) Trovare gli intervalli su cui f é crescente.

(b) Trovare massimi e minimi relativi di f.

(c) Calcolare $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$.

(d) Trovare gli intervalli su cui la funzione f é convessa.

(e) Disegnare un grafico di f che tenga conto delle informazioni in (a),(b),(c), (d).